

ELEKTRISCHE NETWERKEN II

door

prof. dr. K. M. Adams

ir. W. Buijze

ir. A. Henderson

V O O R W O O R D

Deze leidraad bevat de stof van de theorie der elektrische netwerken, zoals die aan studenten in de elektrotechniek van het tweede studiejaar aan de Technische Hogeschool te Delft wordt gedoceerd.

In dit studiejaar wordt systematisch ingegaan op de grondslagen van de analyse van elektrische netwerken, waarbij de graphtheorie en de lineaire algebra belangrijke hulpmiddelen zijn. Er is naar gestreefd de student inzicht te geven in algemene eigenschappen van netwerken. Ook werd opgenomen een deel van de theoretische basis, die nodig is voor de berekening van netwerken van grote omvang. Dergelijke netwerken komen in toenemende mate voor in de energietechniek alsook in de moderne elektronica.

In dit verband hebben wij veel aandacht besteed aan de afleiding van de toestandsvergelijkingen in standaardvorm, alsmede het systematisch oplossen van schakelvraagstukken, zowel volgens klassieke methoden als met behulp van de laplace-transformatie. De meningen over hoe men dit laatste onderwerp dient te doceren lopen vaak uiteen. Ons standpunt hierover is te vinden in de hoofdstukken 7 en 8.

De hoofdstukken 9 en 10 staan nogal los van de rest. Zij zijn hierdoor niet minder belangrijk, maar hebben juist een plaats in dit tweede jaars' college gevonden wegens de samenstelling van het studiepakket van het derde studiejaar en de daarvoor benodigde voorkennis.

Evenals in de handleiding "Elektrische Netwerken I" zijn bepaalde delen van de tekst cursief gedrukt; deze kunnen bij een eerste bestudering van de stof worden overgeslagen.

De student wordt aangeraden niet alleen de stof te "bestuderen" maar ook over de samenhang van het geheel na te denken. De in de tekst opgenomen vragen en opgaven zijn bedoeld om dit denken te stimuleren. Daarnaast is het van groot belang de verzameling "Vraagstukken Elektrische Netwerken II" van ir. W. Buijze en ir. A. Henderson ter hand te nemen en hieruit tijdens de studie regelmatig vraagstukken proberen op te lossen.

Alleen op deze wijze kan de student nagaan of hij de stof in voldoende mate beheerst.

Wij zijn dank verschuldigd aan prof.dr.ir. B.D.H. Tellegen voor zijn gedetailleerde opmerkingen op een eerste versie van die stof, die is opgenomen in de hoofdstukken 1, 2 en 7; deze hebben tot aanmerkelijke verbeteringen geleid.

Voor nadere opmerkingen van de geïnteresseerde lezer houden wij ons gaarne aanbevolen.

Delft, september 1973.

K.M. Adams

W. Buijze

A. Henderson.

INHOUD

HOOFDSTUK I : GRAPHTHEORIE		blz.
I.1.	Inleiding	1
I.2.	Basisbegrippen	2
I.3.	Planaire graphen	9
I.4.	Matrices in de graphtheorie	20
HOOFDSTUK II : SYSTEMATISCHE BEREKENING VAN ELEKTRISCHE NETWERKEN OP BASIS VAN DE GRAPHTHEORIE		
II.1.	De wetten van Kirchhoff	33
II.2.	Formulering van het netwerkprobleem	37
II.3.	De oplossing van een netwerkprobleem met behulp van de B -matrix	40
II.4.	De oplossing van een netwerkprobleem met behulp van de Q -matrix	45
II.5.	De keuze tussen de B - en de Q -methode	46
II.6.	Stelling 17.	48
II.7.	De oplossing van een netwerkprobleem met de A -matrix (knooppuntsmethode)	51
II.8.	De oplossing van een netwerkprobleem met de C -matrix (maasmethode)	57
II.9.	Nabeschouwing	60
II.10.	Het dualiteitsbeginsel	61
HOOFDSTUK III : TRANSFORMATOR-NETWERKEN		
III.1.	Inleiding	67
III.2.	Een netwerk zonder transformatoren	68
III.3.	De enkele transformator	70
III.4.	Een 5-poortnetwerk met één transformator	71
III.5.	Het verband tussen N en P	73
III.6.	Het oplossen van een netwerkprobleem met transformatoren	75
III.7.	De keuze tussen de N - en de P -methode	76
III.8.	Meervoudig gewikkelde transformatoren	78

HOOFDSTUK IV : DE KARAKTERISTIEKE VERGELIJKING	82
HOOFDSTUK V : DE TOESTANDSVERGELIJKINGEN	
V.1. Een systeem van de eerste orde	90
V.2. Een systeem van de tweede orde	91
V.3. Een andere formulering	92
V.4. Energiebeschouwing	92
V.5. Resumé	93
V.6. Een systeem van de n^{de} orde	94
V.7. Het begrip "toestand"	95
V.8. Keuze van de toestandvector	96
V.9. Het formuleren van netwerkproblemen met behulp van toestandsvergelijkingen	97
HOOFDSTUK VI : ALGEMENE TOESTANDSVERGELIJKINGEN IN MATRIXVORM	
VI.1. Inleiding	101
VI.2. Algemene formulering	101
VI.3. Afleiding van de toestandsvergelijkingen	104
VI.4. Opmerkingen	107
VI.5. Het ontbreken van kolommen	109
VI.6. Voorbeelden	110
HOOFDSTUK VII : NETWERKEN MET SCHAKELAARS	
VII.1. Inleiding	113
VII.2. Eerste orde netwerken	116
VII.3. De algemene oplossing van een eerste-orde differen- tiaalvergelijking	123
VII.4. Kwalitatieve beschouwingen	125
VII.5. Differentiërende en integrerende circuits	131
VII.6. Tweede-orde netwerken	133
VII.7. Continuïteitsstelling	141
VII.8. De stootfunctie	143
VII.9. Hogere orde netwerken	148

	blz.
HOOFDSTUK VIII : HET ONDERZOEK VAN SCHAKELVERSCHIJNSELEN MET BEHULP VAN DE TRANSFORMATIE VAN LAPLACE	
VIII. 1. Inleiding	149
VIII. 2. Definitie	150
VIII. 3. De sprong-, de puls- en de stootfunctie	151
VIII. 4.	152
VIII. 5. De transformatie van een gedifferentieerde en van een geïntegreerde functie	152
VIII. 6. De laplace-transformatie toegepast op de net- werkvergelijkingen	153
VIII. 7. De dempingsstelling	155
VIII. 8. Eenvoudig voorbeeld	155
VIII. 9.	157
VIII.10. Uitgewerkte voorbeelden	158
Tabel	167
VIII.11. Laplace-transformatie van de algemene toestands- vergelijkingen van netwerken met schakelaars	168
VIII.12. Bewijs van de continuïteitsstelling	177
VIII.13. Slotopmerkingen	182
 HOOFDSTUK IX: PASSIEVE RECIPROKE N-POORTNETWERKEN	
	blz.
IX.1.	184
IX.2. Reciprociteit	186
IX.2.1.	186
IX.2.2.	187
IX.2.3.	188
IX.3.	189
IX.3.1. Voorbeeld	190
IX.3.1.1.	191
IX.3.1.2.	191
IX.3.2. Serieschakeling	191
IX.3.3.	193

	blz.	
IX.4.	De poortvoorwaarde	194
IX.4.1.		195
IX.5.	De admittantie-matrix Y van een n-poort	195
IX.5.1.	Parallelschakeling	195
IX.5.2.	Een tweede voorbeeld	197
IX.6.	De hybride-matrices H van een n-poort	197
IX.6.1.		197
IX.6.2.		199
IX.6.3.		200
IX.6.4.	Reciprociteit	201
IX.6.5.		202
IX.6.5.1.		202
IX.7.	De inverse van een matrix	202
IX.8.	De submatrices	204
IX.9.	De ketting-matrix K	205
IX.9.1.		205
IX.9.2.		206
IX.9.3.		207
IX.9.4.	Reciprociteit	207
IX. 9.5.		211
IX.10.	Tellegen-polynomen	212
IX.10.1.		212
IX.10.2.		212
IX.10.3.		213
IX.10.4.		213
IX.10.5.		213
IX.10.6.	Vrije trillingen	214
IX.11.	Netwerken met n klemmen, waarvan één geaard is.	215
IX.11.1.		215
IX.11.2.	De "onbepaalde"-admittantiematrix Y_{on} .	217
IX.11.2.1.		217
IX.11.2.2.		218
IX.11.2.3.		218

VII

		blz.
IX.11.3.		218
IX.11.4.		222
IX.11.5.	De "onbepaalde"-impedantiematrix Z_{on} .	223
HOOFDSTUK X : LANGE LEIDINGEN		
X. 1.	Inleiding	226
X. 2.		227
X. 3.	De voortplantingssnelheid	230
X. 4.	Energie	231
X. 5.	De karakteristieke impedantie	231
X. 6.	Reflectie	231
X. 6.1.	$Z = \infty$, d.w.z. de eind- of uitgangspoort van de transmissielijn ($z = 1$) is open.	231
X. 6.2.	$Z = 0$, d.w.z. de uitgangspoort is kortgesloten	235
X. 6.3.	$Z = Z_0$, d.w.z. de uitgangspoort is afgesloten met de karakteristieke impedantie.	236
X. 6.4.	Het geval $Z_0 < Z < \infty$.	236
X. 6.5.	Het geval $Z_0 > Z > 0$.	238
X. 7.	Een transmissielijn met verliezen	239
X. 7.1.		239
X. 7.2.		241
X. 7.3.		241
X. 7.4.		242
X. 7.5.	Lopende golven	243
X. 7.6.	De karakteristieke impedantie Z_0 .	244
X. 7.7.	Reflectie in een eindig lange tweedraads- leiding afgesloten met een willekeurige impedantie Z .	246
X. 7.8.	Opgaven	248

I. GRAPHTHEORIE

I.1. Inleiding

Bij vele problemen, zowel op technologisch als op ander gebied, komt men in aanraking met combinatorische vraagstukken. Dit zijn problemen, waarbij de manier, waarop de verschillende onderdelen van een geheel aan elkaar zijn gekoppeld, of de wijze, waarop de elementen een bepaald patroon vormen, het centrale studie-object is. Bijvoorbeeld hebben (zie Elektrische Netwerken I) een laddernetwerk en een brugschakeling essentieel verschillende structuren, die tot uiting komen in de voor deze twee netwerktypen verschillende keuze van de meest geschikte rekenwijze. Deze keuze wordt bepaald door de manier, waarop de takken aan elkaar verbonden zijn en niet door de specifiek elektrische eigenschappen van de elementen.

Eveneens vindt men bij chemische verbindingen, verkeers-, vervoers- en bevoorradingsproblemen, communicatienetten, logische schakelingen, programmering van computers - om maar enkele gebieden te noemen - dat dezelfde soort combinatorische problemen aan de orde komt.

Ten grondslag aan veel van deze problemen ligt de graphtheorie, een wiskundige theorie, die een onderdeel van de topologie is.

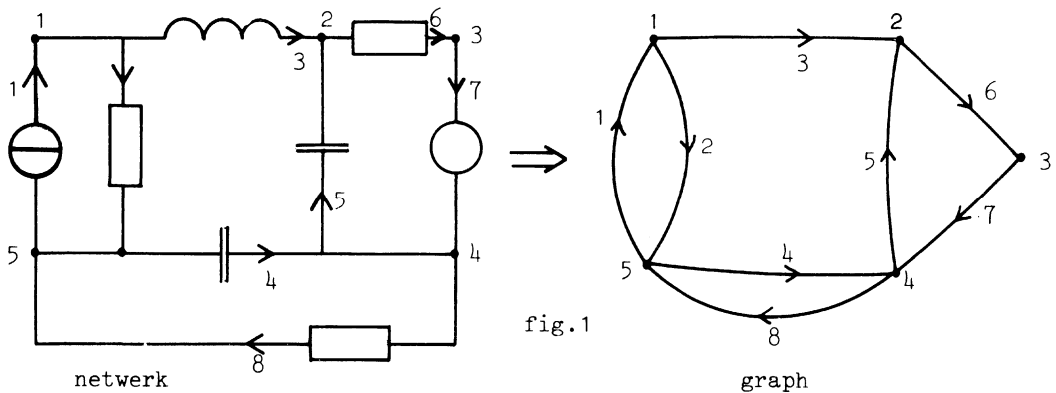
In de hierna volgende paragrafen zullen wij enkele elementaire delen van deze theorie ontwikkelen en in hoofdstuk II de resultaten op elektrische netwerken toepassen. We behandelen eerst netwerken, die geen transformatoren bevatten en aan de hand hiervan leiden we algemene eigenschappen en rekenprocedures af, die van groot belang zullen blijken voor de systematische berekening van netwerken van grote omvang, met behulp van rekentuigen.

Daarna, in hoofdstuk III, zullen wij de theorie uitbreiden tot netwerken met transformatoren. Na het afleiden van de zogenaamde toestandsvergelijkingen (hoofdstuk VI) zullen wij in staat zijn het gedrag van netwerken met schakelaars te doorgronden en systematisch te berekenen. Onderweg zullen wij de fundering geven voor de procedures, die in E.N.I zijn gebruikt, maar daar niet geheel zijn gerechtvaardigd.

I.2. Basisbegrippen

Een graph bestaat uit twee soorten onderdelen, die wij knooppunten en takken noemen. De opbouw van de graph en de onderlinge relaties tussen de takken en knooppunten, of bepaalde verzamelingen daarvan, vormen het studieobject van de graphtheorie.

Een graph resulteert, als bijvoorbeeld een elektrisch netwerk van al zijn elektrische eigenschappen is ontdaan (fig.1). Om de identificatie te vergemakkelijken geven wij iedere tak en ieder knooppunt een nummer.



Zijn de takken van een richting (pijl) voorzien, dan spreken we van een gerichte graph; is dat niet het geval, dan spreken we van een ongerichte graph.

De graph tekent men zo, dat een (gebogen) lijn een tak voorstelt. Deze lijnen komen samen in de knooppunten, welke met stippen of cirkeltjes worden aangegeven. In een elektrisch netwerk maakt het voor het elektrisch gedrag niet uit of bepaalde componenten door een impedantieloze draad zijn verbonden of rechtstreeks aan elkaar zijn "geknoopt". Meestal zullen wij geen behoefte hebben de impedantieloze verbindingen als aparte takken in de graph op te nemen.

Is een zeker knooppunt het begin- of het eindpunt van een bepaalde tak, dan zegt men dat zij incident zijn. Bijvoorbeeld is tak 1 in fig.1 incident aan knooppunt 1, terwijl knooppunt 4 niet incident is aan tak 3. Iedere tak is incident aan twee knooppunten.

Een deelgraph van een graph G is een graph, die ontstaat uit G door het verwijderen van nul, één of meer takken en/of knooppunten. De graph G is dus een deelgraph van zichzelf.

In fig.1 vormen de takken 1 en 2 met de knooppunten 1 en 5 een deelgraph.

Een weg is een rij van takken en knooppunten, beginnend en eindigend met knooppunten, zodanig, dat iedere twee opeenvolgende elementen in de rij aan elkaar incident zijn. Geven wij de knooppunten aan met een accent en de takken zonder accent dan is in fig.1 de rij $1', 3, 2', 5, 4', 7, 3'$ een weg.

Een lus is een weg, waarvan het begin- en het eindknooppunt dezelfde zijn, zonder dat een inwendig knooppunt meer dan één keer in de rij voorkomt. Wij noemen zo'n weg een gesloten weg. In fig.1 is de rij $5', 1, 1', 3, 2', 5, 4', 4, 5'$, een lus. De rij $1', 1, 5', 4, 4', 8, 5', 2, 1'$ is

geen lus maar een verzameling van elementen die twee lussen vormen. Als er geen verwarring kan ontstaan, kunnen we volstaan een lus alleen met de takken aan te duiden, b.v. 1, 3, 5, 4. De knooppunten zijn dan vanzelf bekend.

In een samenhangende graph bestaat er een weg voor iedere keuze van twee knooppunten als begin- en eindknooppunten. Een voorbeeld van een niet-samenhangende graph is in fig.2 getekend. Deze graph bestaat uit 7 knooppunten en 10 takken.

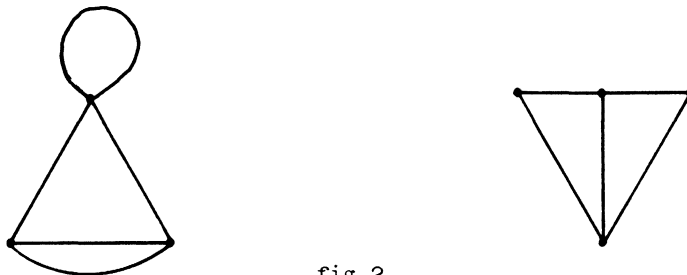
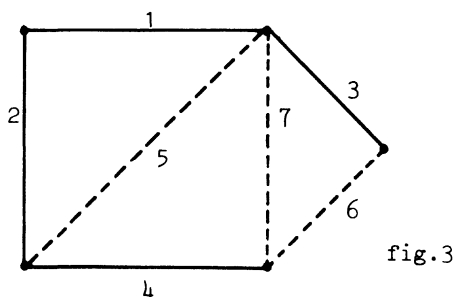


fig.2

In dit geval bestaat de graph uit twee in zich samenhangende deelgraphen, die onderling niet-samenhangend zijn.

Een samenhangende deelgraph van een graph G , waarin alle knooppunten van G zijn opgenomen en waarin geen lussen voorkomen, heet een boom. De takken van de boom heten boomtakken. In de graph van fig.3 is een

boom getekend (getrokken lijnen).



De takken van de graph, die niet tot de boom behoren, heten koorden (links) en vormen samen het boom-complement of de co-boom.

Stelling 1. Als k het aantal knooppunten is in een samenhangende graph, bevat een boom $k - 1$ takken.

Bewijs: Laten we de boom als volgt construeren. We beginnen met een knooppunt $1'$ en voegen een tak 1 toe die aan $1'$ incident is. Maar 1 is ook incident aan een ander knooppunt $2'$, welke nu ook toegevoegd wordt. We hebben dus twee knooppunten en één tak. Indien de boom uit meer dan één tak bestaat, moet $1'$ of $2'$ incident aan een andere tak 2 zijn. Anders zouden er knooppunten bestaan waartussen geen weg bestaat. Deze tak is incident aan een knooppunt $3'$, dat niet met $1'$ of $2'$ samenvalt; anders zou de deelgraph een lus bevatten. Eén van de knooppunten $1'$, $2'$, $3'$ is incident aan een nieuwe tak 3, die op zijn beurt incident is aan een nieuw knooppunt $4'$, enz. Bij elke stap voegen we een tak en een knooppunt toe. Het totaal aantal takken is dus één minder dan het totaal aantal knooppunten. q.e.d.

In veel graphen zijn verscheidene bomen aan te wijzen. In dit college is het aantal mogelijke bomen niet belangrijk. Wel is van belang, dat men bij alle hierna volgende beschouwingen één boom kiest. Alles wat dan volgt, geldt voor die ene boom. Het zal blijken dat in sommige problemen een bepaalde boom, in andere problemen een bepaalde verzameling van bomen, de voorkeur verdient.

Stelling 2. Als in een samenhangende graph het aantal knooppunten k , het aantal takken t en het aantal koorden met betrekking tot één boom μ is, dan geldt

$$t = k - 1 + \mu.$$

Bewijs: Het aantal boomtakken is $k - 1$ (Stelling 1). Als μ het aantal koorden is, dan is het totale aantal takken tezamen $k - 1 + \mu$. q.e.d.

Stelling 3. Voor een niet-samenhangende graph bestaande uit p deelgraphen, die ieder samenhangend zijn, maar die onderling paarsgewijs geen samenhangende graph vormen, geldt:

$$t = k - p + \mu.$$

Bewijs: Voor elke samenhangende deelgraph i geldt

$$t_i = k_i - 1 + \mu_i.$$

Dus voor de gehele graph

$$t = \sum_{i=1}^p t_i = \sum_{i=1}^p (k_i - 1 + \mu_i) = k - p + \mu. \quad \text{q.e.d.}$$

Het getal μ heet de nulliteit of het defect van de graph.

Stelling 4. Elke koorde bepaalt samen met de bijbehorende boom één, en slechts één, lus.

Bewijs: Stel, dat de koorde β incident is aan de knooppunten X en Y . Tussen X en Y bestaat (behalve over de koorde β) één, en slechts één, weg, die uitsluitend uit boomtakken is gevormd. Deze boomtakken vormen dus samen met β een lus. Het bestaan van een tweede lus zou inhouden, dat de boom een lus bevat, hetgeen in strijd is met de definitie van een boom. q.e.d.

Met betrekking tot een reeds gekozen boom, is een basislus een lus met de eigenschap, dat deze uit één koorde en verder uit boomtakken bestaat. Een basislusstelsel in een graph is de verzameling van alle basislussen met betrekking tot één bepaalde boom. In fig.3 zijn er drie

basislussen nl. één met de takken 5, 1, 2, één met de takken 6, 3, 1, 2, 4 en één met de takken 7, 1, 2, 4. De basislusnummering kan dezelfde zijn als die van de koorden.

We behandelen nu het belangrijke begrip snede. We gaan uit van een samenhangende graph G en beschouwen een zekere verzameling $\{s\}$ van takken met de volgende eigenschappen:

a. Indien alle takken van $\{s\}$ uit de graph G worden verwijderd, valt de graph uiteen in twee in zich samenhangende deelgraphen G_1 en G_2 , die onderling niet-samenhangend zijn.

De verzamelingen van knooppunten van G_1 en G_2 zijn dan disjunct, d.w.z. geen knooppunt van G_1 valt samen met een knooppunt van G_2 .

b. Als alle takken van $\{s\}$ met uitzondering van de tak t_1 uit de graph G worden verwijderd, is de resulterende graph wel samenhangend, onafhankelijk van de keuze van t_1 .

Een $\{s\}$, die aan deze beide voorwaarden voldoet heet een snede. Bijvoorbeeld, de takverzamelingen $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 5, 7\}$, $\{3, 4, 8\}$ zijn sneden van de graph van fig.1. Maar $\{1, 2, 3, 5\}$ en $\{6, 7, 8\}$ zijn dat niet. Essentieel in de definitie is, dat men, om de scheiding in G_1 en G_2 teweeg te brengen, geen overbodige takken in $\{s\}$ opneemt.

Stelling 5. Een boomtak van de graph G , tezamen met koorden, bepaalt één en slechts één snede van G .

Bewijs: Wij beschouwen eerst de boom alleen en verwijderen de desbetreffende boomtak b . De boom valt uiteen in twee deelgraphen g_1 en g_2 met disjuncte verzamelingen van knooppunten $\{k_1\}$ en $\{k_2\}$. Uit de definitie van een boom volgt, dat g_1 en g_2 ieder samenhangen, maar dat $g_1 \cup g_2$ niet samenhangend is. Aan g_1 voegen wij alle koorden toe, die incident zijn aan knooppunten in $\{k_1\}$, maar niet aan knooppunten in $\{k_2\}$. Aan g_2 voegen wij alle koorden toe, die incident zijn aan knooppunten in $\{k_2\}$, maar niet aan knooppunten in $\{k_1\}$. Het is evident, dat deze twee verzamelingen van koorden disjunct zijn.

Zodoende resulteren twee samenhangende graphen G_1 en G_2 , die

onderling niet samenhangen. De overige takken, die nog aan $G_1 \cup G_2$ moeten worden toegevoegd om G terug te krijgen, vormen dan een snede.

Uit de constructie volgt, dat deze snede één boomtak en een aantal koorden bevat. Bovendien levert de constructie een unieke snede op, die wij $\{s_1\}$ zullen noemen. De vraag rijst nu, of er een andere snede $\{s_2\}$, bestaande uit dezelfde boomtak b en een aantal koorden mogelijk is.

Verwijderen wij $\{s_2\}$ dan resulteren twee samenhangende deelgraphen G'_1 en G'_2 , die niet onderling samenhangen (definitie van een snede). Uit G'_1 en G'_2 verwijderen wij alle koorden. Er resulteren de deelgraphen g'_1 en g'_2 , die uitsluitend uit boomtakken bestaan. Maar g'_1 en g'_2 zijn ieder samenhangend, daar de boom van G wordt gevormd door $g'_1 \cup g'_2 \cup b$ en deze is samenhangend.

Dus volgt dat g'_1 en g_1 identiek zijn, evenals g'_2 en g_2 , zodat $\{s_2\} = \{s_1\}$. q.e.d.

In fig.4 is het een en ander geïllustreerd.

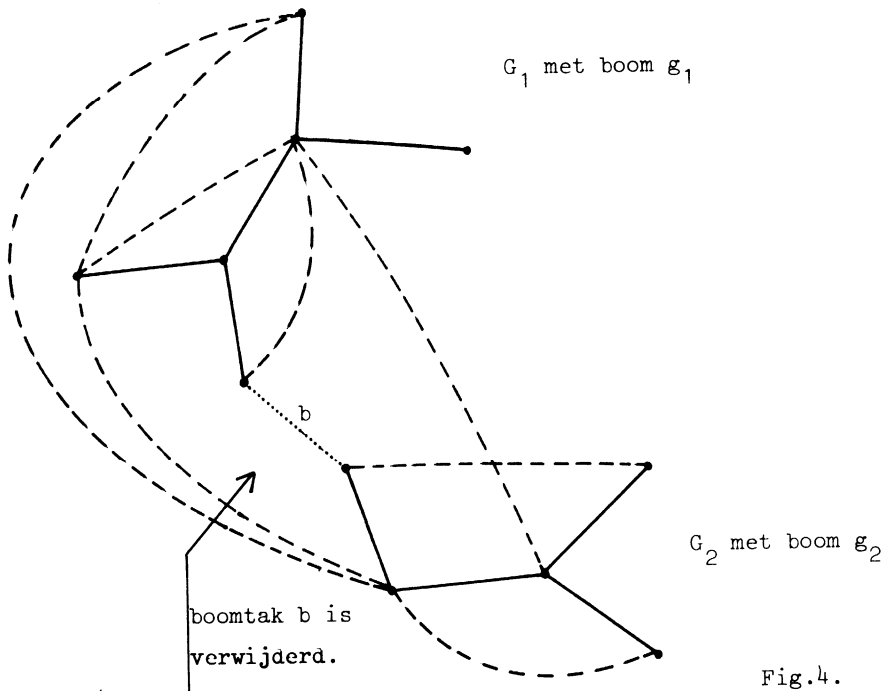


Fig.4.

- Opmerkingen: a) Een deelgraph kan bestaan uit één enkel knooppunt.
- b) Het begrip snede is fundamenteel bij alle beschouwingen over communicatie - of wegverbindingen tussen steden of landen, alsmede in allerlei elektrotechnische vraagstukken.

- Opgaven: 1. Bewijs, dat iedere snede tenminste een tak van iedere boom bevat.
2. Bewijs, dat iedere snede een even aantal takken gemeenschappelijk heeft met iedere lus.

Een snede, die gebaseerd is op één boomtak noemen wij een basissnede. De verzameling van basissneden met betrekking tot een bepaalde boom heet basissnedestelsel.

I.3. Planaire graphen

Een graph heet planair (vlak), als hij op het buitenoppervlak van een bol kan worden getekend zonder kruisende takken. De tot dusver getekende graphen zijn alle planair. In fig.5 is een niet-planaire graph getekend.

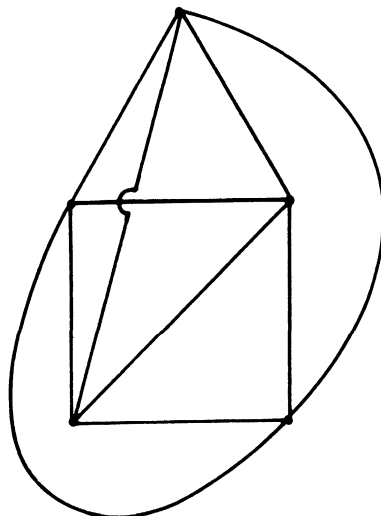


Fig.5

Een planaire graph kan, zoals de naam suggereert, altijd op een plat vlak zonder kruisende takken worden getekend. Via stereografische projectie kan het oppervlak van een bol op een plat vlak één-éénduidig worden afgebeeld. De voorkeur wordt aan de bol als referentieruimte voor de graph gegeven om redenen van symmetrie, zoals later zal blijken. De graph van fig.6 is planair, hoewel hij kruisende takken heeft.

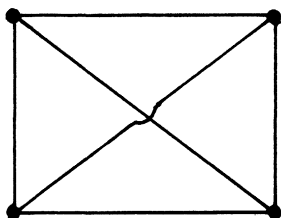


Fig.6

Hij kan immers anders worden getekend, zie fig.7.

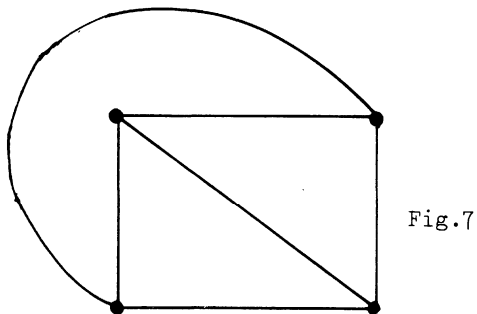
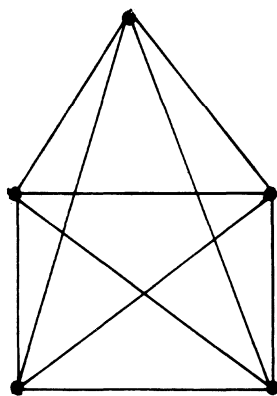
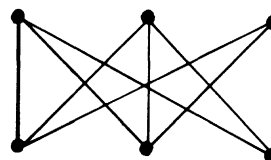


Fig.7

Volgens een stelling van Kuratowski, die teveel theorie vergt om hier bewezen te worden, bevat iedere niet-planaire graph tenminste één van beide deelgraphen volgens fig.8.



a)



b)

Fig.8

Een planaire graph deelt het oppervlak van de bol, waarop hij afgebeeld is, in een aantal gebieden, vensters genaamd, in. De rand van een venster bestaat uit takken. Deze takken vormen een lus. Zo'n lus heet een maas. Een maas is dus de rand van een gebied, dat geen tak in zijn intérieur heeft. In fig.9a zijn er vier vensters, die we met een stip hebben aangegeven. Venster 1 wordt begrensd door maas 1, die uit de takken 1,2 en 4 bestaat.

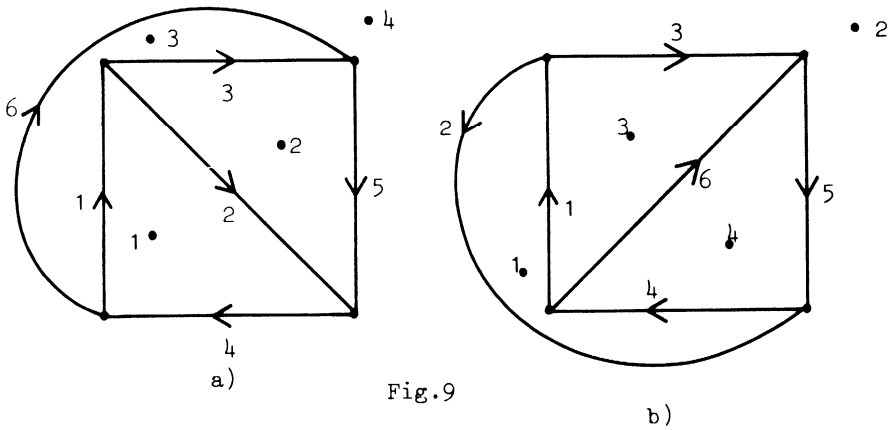


Fig.9

Maas 4 bestaat uit de takken 4, 5, 6 (men denke de graph op een bol getekend). De mazen zijn in het algemeen niet van een boom af te leiden, zoals een basislusstelsel wel is.

Figuur 9b is in wezen dezelfde graph als fig.9a. Alleen is de "buitenmaas" nu maas 2.

Als de graph op een bol wordt getekend, is er geen onderscheid meer tussen binnen- en buitenmaas. Dit is de hoofdreden om de bol en niet het platte vlak als referentieruimte voor de graph te beschouwen. Bij meer ingewikkelde graphen echter kan de wijze waarop de graph is getekend de mazen wezenlijk beïnvloeden.

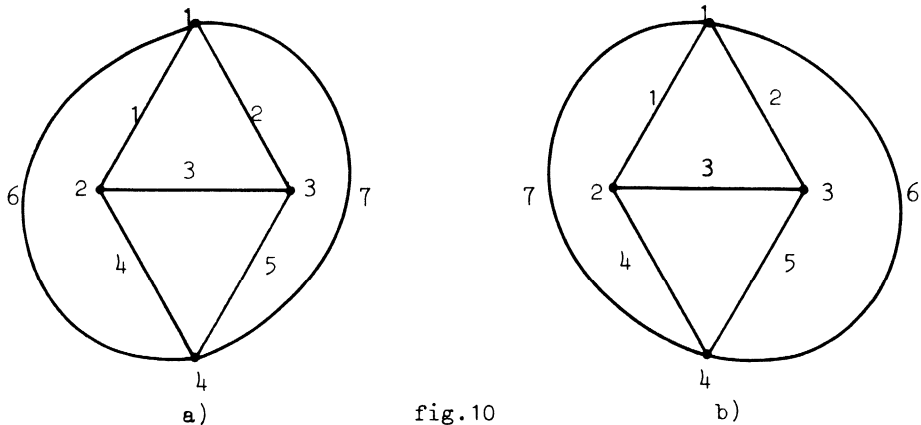
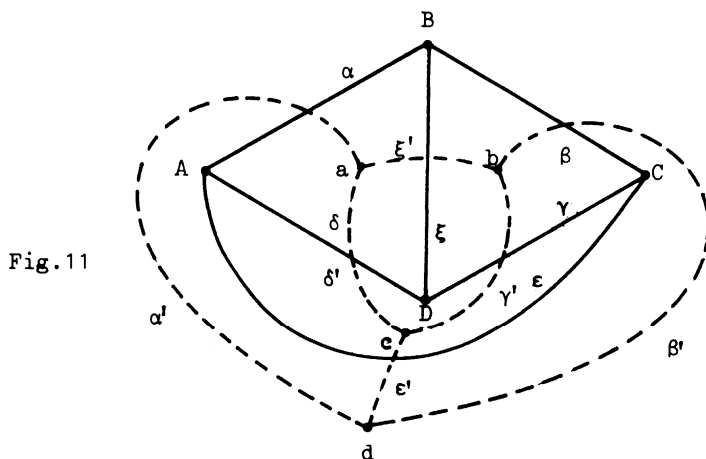


fig.10

De mazen (takverzamelingen) $\{1, 4, 6\}$ en $\{2, 5, 7\}$ van fig.10a. zijn niet dezelfde als de mazen $\{1, 4, 7\}$ en $\{2, 5, 6\}$ van fig.10b, hoewel de twee graphen, wat de onderlinge relaties tussen knooppunten en takken betreft, wel identiek zijn. Deze mogelijke meervoudige uitkomst bij het bepalen van de mazen leidt echter niet tot extra moeilijkheden, als wij de graphtheorie op de analyse van elektrische netwerken toepassen.

De relatie tussen vensters en takken wordt ook met het woord incidentie aangegeven. Als de rand van venster a tak α bevat, zeggen wij, dat a en α incident zijn. (fig.11).

Elke tak is incident aan twee, en slechts twee, vensters. Bijv. tak α is incident aan vensters a en d , tak β is incident aan vensters b en d . Dit resultaat is niet zo zeer een theorema, dat uit de definitie volgt maar een deel van de definitie.



Om het schijnbaar eenvoudige intuïtieve begrip "indeling van een oppervlak in een aantal vensters" een logische basis te geven, zijn diepgaande topologische beschouwingen nodig.

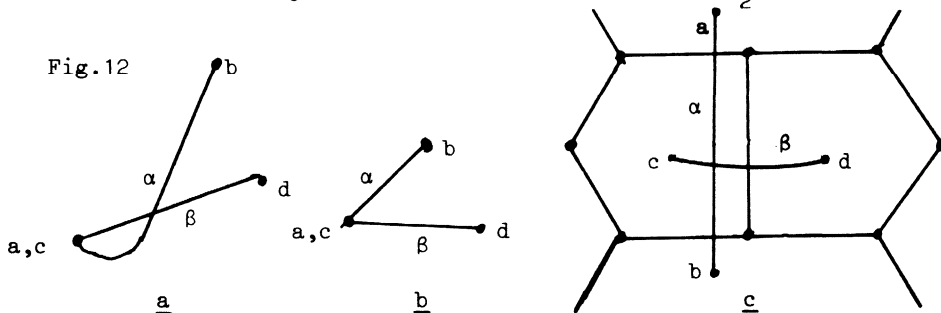
Tot iedere planaire graph G_1 met takken α_i behoort een duale graph

G_2 met takken $\alpha_i^!$, die als volgt wordt geconstrueerd:

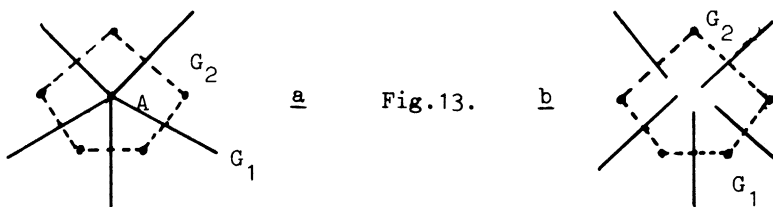
In elk venster wordt één knooppunt geplaatst. Deze knooppunten worden door takken $\alpha_i^!$ onderling verbonden, zodanig dat elke tak α_i van de gegeven graph G_1 door één en slechts één van de takken $\alpha_i^!$ wordt gekruisd. Zie fig.11. Zodoende ontstaat een één-éénduidig verband tussen de graphen G_1 en G_2 , waarin de takken van G_1 met de takken van G_2 overeenkomen, en de vensters van G_1 met de knooppunten van G_2 .

Stelling 6: De duale graph G_2 van een samenhangende planaire graph G_1 is planair en zijn duale graph is weer G_1 .

Bewijs: Stel dat G_2 niet-planair is zodat er twee kruisende takken α, β zijn welke incident aan de knooppunten a, b en c, d zijn. Vallen a en c samen dan kan de kruising altijd vermeden worden door de graph anders te tekenen (fig.12a, b). Zijn a, b c, d verschillend dan liggen zij binnen 4 verschillende vensters van G_1 . Indien tak α tak β kruist dan ligt een deel van α in venster a van G_1 , een deel hetzij in venster c hetzij in venster d en een deel in venster b. Dit is slechts mogelijk indien α tenminste twee takken van G_1 snijdt, hetwelk in strijd met de constructieregels van G_2 is (fig.12b, c).



Dus is G_2 planair. Vervolgens bewijzen wij dat elk knooppunt van G_1 binnen een venster van G_2 ligt. Wij beschouwen een enkel knooppunt A van G_1 (fig.13a), dat het gemeenschappelijke



snijpunt van de randen van een aantal vensters van G_1 is. In elk zo'n venster wordt een knooppunt van G_2 geplaatst en onderling verbonden zodat iedere tak die aan A incident is eenmaal gekruist wordt. Dan moet A binnen het zojuist gevormde venster liggen. (In feite formuleert deze constructie wat wij bedoelen door het intuïtieve begrip "binnen"). Door de knooppunten van G_2 willekeurig dichtbij A te plaatsen kan het venster van G_2 willekeurig klein gemaakt worden zodat het onmogelijk is een knooppunt anders dan A erin te sluiten. Tenslotte moeten wij bewijzen dat ieder venster van G_1 een knooppunt van G_2 bevat. Elke maastak van G_1 wordt door een tak van G_2 gesneden (fig.13b). Een deel van zo'n tak compleet met incident knooppunt moet zich dan binnen het bij de maas behorende venster bevinden.

Derhalve voldoet G_1 aan de constructieregels voor de duale graph van G_2 . q.e.d.

Voortaan kunnen wij spreken van de duale graphen G_1 en G_2 . Ieder is de duale graph van de andere. Bevat G_1 t takken, k knooppunten en m vensters, dan bevat G_2 t takken, m knooppunten en k vensters.

Opmerkingen. Dit bewijs is geen streng bewijs daar er veel gebruik wordt gemaakt van intuïtieve ruimtelijke begrippen, die hier niet nader gefundeerd worden. Het eenvoudige begrip dualiteit faalt indien de graph op een torus of op de band van Möbius is getekend. Op dergelijke oppervlakken is het mogelijk een lus te tekenen zonder dat het oppervlak in twee gebieden wordt gedeeld. Ook is impliciet gebruik gemaakt van de continuïteitseigenschappen van de graph, zonder nadere fundering. Dit was essentieel bij de beschouwingen in verband met fig.12c.

De graph G_1 van fig. 14 heeft twee vensters en één tak α die geen scheiding tussen twee vensters vormt. Blijkbaar is deze tak slechts incident aan één venster in tegenstelling tot wat eerder is beweerd. Wij zouden derhalve verwachten dat de duale graph G_2 een tak bevat die slechts aan één knooppunt incident is (fig.14). De duale graph van G_2 is volgens de constructieregel wel de graph G_1 van fig.14. Een meer geavanceerde theorie van de dualiteit toont aan dat deze graphen werkelijk dual zijn. Ze behoren echter tot een klasse graphen die zelden belangrijk in de theorie der elektrische netwerken is. Zij zijn in het bewijs van stelling 6 niet in rekening gebracht.

Er bestaat echter een verband tussen deze graphen en het verschijnsel van een eigenfrequentie die nul is, vgl. hfdst. X,EN.I.

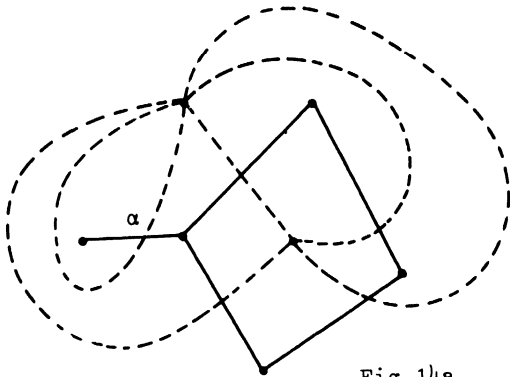


Fig.14a

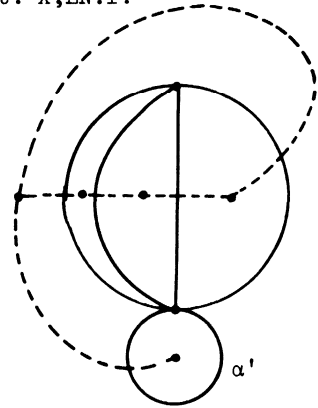


Fig.14b

Indien de graph uit twee of meer niet-samenhangende delen bestaat, is de duale graph wel samenhangend maar met een scharnierend knooppunt (a in fig.15). Deze duale graph bestaat uit deelgraphen die in het knooppunt A enkelvoudig samenhangen.

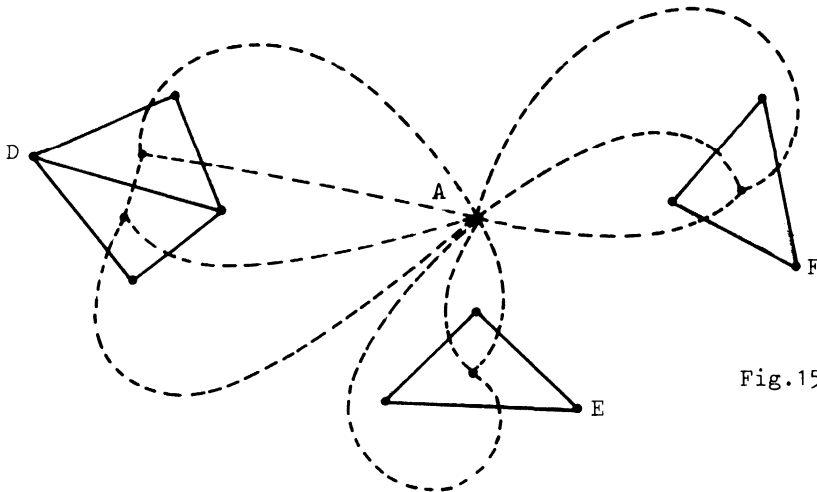


Fig.15

De duale graph van deze duale graph is samenhangend, en wel met een scharnierend knooppunt (knooppunten D, E, F vallen in dit geval samen). Ondanks het feit dat een tweevoudige toepassing van de dualiteitsconstructie de oorspronkelijke graph niet oplevert, ontstaan bij de toepassing

op elektrische netwerken geen extra moeilijkheden. De niet-samenhangende en enkelvoudig samenhangende netwerken zijn elektrisch gelijkwaardig.

Stelling 7: Een samenhangende planaire graph bevat $m = \mu + 1 = t - k + 2$ vensters (mazen) waarin t het aantal takken, k het aantal knooppunten en μ het aantal lussen in een basislusstelsel is.

Bewijs: Kies een boom en verwijder uit de graph alle koorden t.o.v. deze boom. De resulterende graph bevat $k - 1$ takken (Stelling 1) en één venster (de hele oppervlakte van de bol). Door het toevoegen van een koorde wordt een lus gecreëerd en dus een extra venster. Het toevoegen van een tweede koorde creëert een tweede lus en een derde venster. Doorgaande op deze manier vinden wij dat het aantal vensters één meer is dan het aantal koorden. Dus (Stelling 3) is $m = \mu + 1 = t - k + 2$. q.e.d.
Nogmaals, dit is geen streng bewijs. Er wordt veel gebruik van de intuïtieve begrippen van de ruimtelijke indeling gemaakt.

Ook gerichte planaire graphen hebben een duale graph.

Wij definiëren de positieve omlooprichting van een maas als die richting, waarbij bij het doorlopen van de maas het bijbehorende venster links ligt. Dat dit niet altijd linksom is, blijkt uit fig.16.

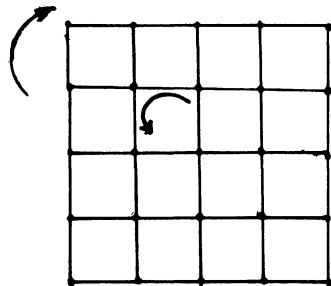


Fig.16

Voor een binnenste venster betekent de positieve omlooprichting linksom, voor een buitenste venster echter rechtsom.

De duale graph G_2 van een gerichte graph G_1 wordt als volgt geconstrueerd:

1. G_1 wordt eerst als een ongerichte graph g_1 beschouwd.

De duale (ongegerichte)graph van g_1 wordt op de gebruikelijke manier geconstrueerd. Er resulteert de graph g_2 .

2. Aan iedere maas van G_1 wordt de positieve omlooprichting toegekend.

3. Komt de richting van tak α van G_1 overeen met de omlooprichting van de bij venster a behorende maas dan wordt tak α' van g_2 van knooppunt A afgericht.

In het tegenovergestelde geval wordt tak α' naar knooppunt A toegericht.

4. Zodoende ontstaat uit g_2 een gerichte graph G'_2 die wij de gespiegelde duale graph van G_1 noemen.

5. De duale graph G_2 van G_1 wordt verkregen uit G'_2 door G'_2 te spiegelen in het vlak waarop G'_2 is afgebeeld.

Wij kunnen deze procedure voorstellen door eerst G_1 en G'_2 te tekenen op een vel doorzichtig papier en dan de graph G'_2 van de ommezijde van het vel te bekijken. Het op deze wijze waargenomen beeld is dan G_2 . Het is gemakkelijk te verifiëren dat de duale graph van G_2 weer de graph G_1 is, terwijl de gespiegelde duale graph van G'_2 een graph G'_1 is, die verkregen wordt uit G_1 door alle richtingen om te keren.

Beschouw ter illustratie fig.17.

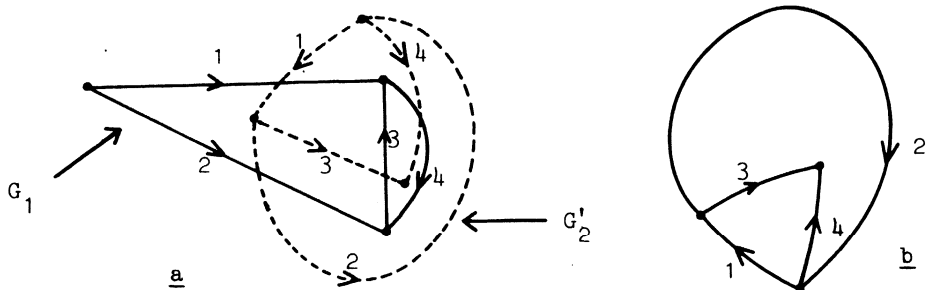


Fig.17

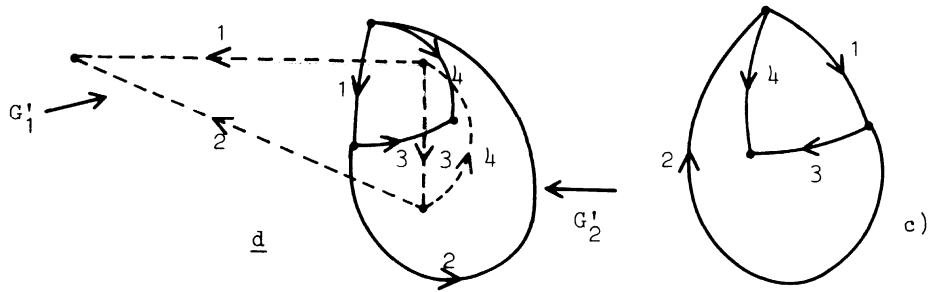


Fig.17

In fig.17a is de gespiegelde duale graph G'_2 geconstrueerd. De takken hiervan zijn met gestippelde lijnen aangegeven. De werkelijke duale graph is in fig.17b resp. in fig.17c getekend. Deze beide laatste graphen zijn identiek.

Bepalen we vervolgens van fig.17b of 17c de duale graph, dan vinden we weer de graph G_1 van fig.17a. Deze laatste constructie wordt aan de lezer overgelaten.

Dat de duale graph van G'_2 niet de graph G_1 is, wordt duidelijk gemaakt in fig.17d, die de gespiegelde duale graph G'_1 van G'_2 vertoont. De graph G'_1 echter is niet hetzelfde als G_1 , noch is hij G_1 gezien van de omme-zijde van het vel.

Een eenvoudiger manier om uit G_1 de gespiegelde duale graph te vinden is:

- a. Teken de ongerichte duale graph.
- b. Draai in gedachten elke tak van G_1 om het snijpunt met de tak van deze duale graph rechtsom tot zij samenvallen.
- c. Kies beide takrichtingen dezelfde.

De richtingen van de takken van G'_2 vallen dan samen met die van de corresponderende takken van G_1 .

Het begrip dualiteit wordt nog verder uitgediept door de twee volgende nuttige stellingen.

Stelling 8. Een takverzameling $\{s\}$ van een planaire samenhangende graph G_1 is een snede van G_1 als en slechts als de in de duale graph G_2 corresponderende takverzameling $\{l\}$ een lus van G_2 is.

Bewijs: Een lus $\{l\}$ deelt het oppervlak van de bol waarop de graph is getekend in twee gebieden α , β . Iedere tak van $\{l\}$ wordt gesneden door precies één tak van $\{s\}$ en door geen andere tak. Derhalve geven alleen de takken van $\{s\}$ verbinding tussen delen van G_1 die in α en β liggen (fig.18a).

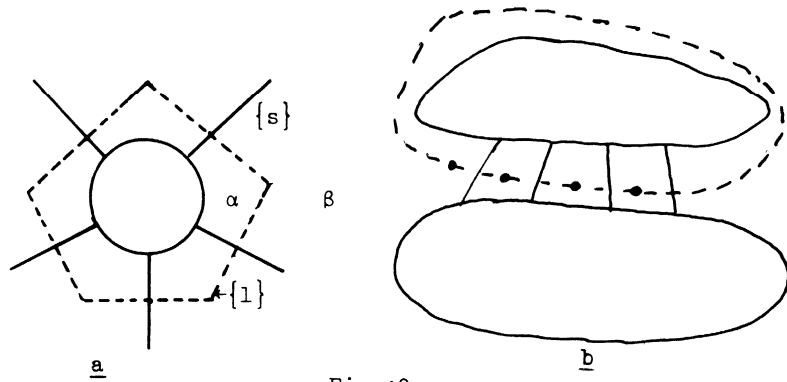


Fig.18

Omgekeerd kan een planaire graph met snede $\{s\}$ zodanig worden getekend dat vensters bestaan die ieder incident aan precies twee takken van de snede zijn. Daar iedere tak aan twee vensters incident is, is het mogelijk deze vensters en de takken van $\{s\}$ zo te ordenen dat een alternerende rij van vensters en takken ontstaat zodanig, dat ieder element in de rij aan zijn voorganger en opvolger incident is, terwijl het eerste en laatste venster identiek zijn. Derhalve vormen de corresponderende knooppunten en takken in de duale graph een lus (fig.18b). q.e.d.

Stelling 9. Een takverzameling $\{b\}$ in een planaire samenhangende graph G_1 is een boom als en slechts als de in duale graph G_2 corresponderende takverzameling $\{c\}$ een co-boom in G_2 is.

Bewijs: De verzameling van koorden $\{c\}$ t.o.v. een bepaalde boom in G_2 bevat geen snede als deelverzameling, want als alle takken in $\{c\}$ worden verwijderd, blijft de graph samenhangend. Derhalve bevat de in G_1 corresponderende verzameling $\{b\}$ geen lus (stelling 8). Als G_2 μ koorden heeft t.o.v. een boom en derhalve $\mu + 1$ vensters heeft (stelling 7), dan heeft G_1 $\mu + 1$ knooppunten en bestaat $\{b\}$ uit μ takken. Derhalve is $\{b\}$ een boom (stelling 1).
Omgekeerd voor iedere boom $\{b\}$ in G_1 geldt dat de co-boom van $\{b\}$ met eentakverzameling $\{d\}$ in G_2 correspondeert die volgens het voorgaande een boom is. Het complement van $\{d\}$ dat met $\{b\}$ correspondeert, moet derhalve een co-boom zijn. q.e.d.

I.4. Matrices in de graphtheorie

I.4.1. De knooppunt-tak-incidentiematrix A_g (eerste incidentiematrix)

Het is mogelijk de incidentie tussen knooppunten en takken aan te geven in een tabel. Het is gebruikelijk in rijen de knooppunten (k) en in kolommen de takken (t) te noteren, nadat deze eerst zijn gerangschikt.

Voorbeeld: fig.19

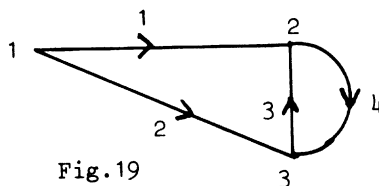


Fig.19

we lezen af:

k \ t	1	2	3	4
1	1	1	0	0
2	-1	0	-1	1
3	0	-1	1	-1

We noteren in rij r , kolom s het getal $+1$, als knooppunt r en tak s incident zijn en de tak van het knooppunt af gericht is.

We noteren -1 , als knooppunt r en tak s incident zijn en de tak naar het knooppunt toe gericht is. We noteren 0 als knooppunt r en tak s niet incident zijn.

De rechthoek van $k \times t$ getallen stelt de matrix A_a voor:

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

De getallen in deze matrix noemen wij elementen.

Een graph is een meetkundig hulpmiddel om de structuur van een netwerk vast te leggen. Met behulp van de incidentiematrix A_a kan men deze structuur volledig numeriek beschrijven.

Voor iedere graph bestaat er een eenduidige incidentiematrix. Omgekeerd, als de A_a -matrix is gegeven kan de graph eenduidig worden geconstrueerd. De getekende graph en de notatie van de incidentiematrix zijn equivalenten voorstellingen van hetzelfde abstracte object.

Er zijn in iedere kolom exact twee elementen, die niet nul zijn, daar aan iedere tak twee, en slechts twee, knooppunten incident zijn.

Bovendien zijn deze steeds van tegengesteld teken, omdat de betreffende tak steeds van het ene knooppunt naar het andere knooppunt gericht is. Dus de som van de elementen van iedere kolom is nul.

Stelling 10. Voor een samenhangende graph is de rang van A_a gelijk aan $k - 1$, waarin k het aantal knooppunten is.

Bewijs: Wij beschouwen de vergelijking

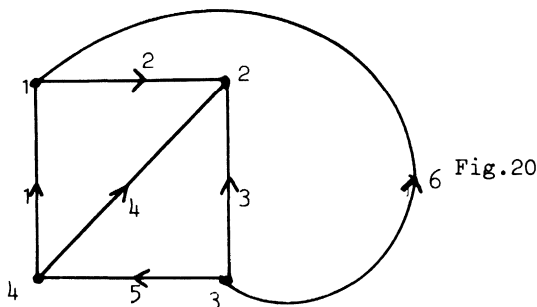
$$D'A_a = 0, \quad (1)$$

waarin D een kolomvector en D' zijn getransponeerde is. Het element in rij r van D wordt met d_r aangeduid. In een kolom van A_a komt in rij s een $+1$ en in rij t een -1 voor. Alle andere elementen in die kolom zijn nul. Derhalve kan alleen aan (1) worden voldaan als $d_s = d_t$. Voor iedere andere kolom vinden we dat twee van de d 's gelijk moeten zijn. Derhalve zijn of alle d 's gelijk of de rijen van A_a kunnen worden verdeeld in twee disjuncte verzamelingen $\{k_1\}$ en $\{k_2\}$, zodanig dat in iedere kolom van $\{k_1\}$ alsook in iedere kolom van $\{k_2\}$ $+1$ en -1 voorkomen. Maar dit betekent, dat er dan geen tak is, die incident is aan zowel een knooppunt van $\{k_1\}$ alsook aan een knooppunt van $\{k_2\}$. D.w.z. de graph is niet-samenhangend, in tegenstelling tot wat gesteld is.

Derhalve zijn alle d 's gelijk, zodat er slechts één lineair onafhankelijke vector D bestaat, die aan (1) voldoet.

Dus is de rang van A_a één minder dan het aantal rijen, d.w.z. de rang van A_a is $k - 1$. q.e.d.

Het is mogelijk door eenvoudige optelling van rijen van A_a alle sneden in de graph te bepalen. Zoals in het bewijs van stelling 5 is vermeld, is een snede een verzameling van takken, die zodanig zijn gekozen, dat iedere tak incident is aan knooppunten in twee disjuncte verzamelingen van knooppunten $\{k_1\}$ en $\{k_2\}$. De andere takken van de graph, die niet tot de snede behoren, zijn incident aan knooppunten in slechts één van de verzamelingen. De verzameling $\{k_1\}$ komt overeen met bepaalde rijen in A_a . Als deze rijen worden opgeteld resulteren elementen $+1$ of -1 slechts in die kolommen, die overeenkomen met de takken van de snede. Bijv. voor de graph van fig.20:



met de A_a -matrix:

$k \backslash t$	1	2	3	4	5	6
1	-1	1	0	0	0	-1
2	0	-1	-1	-1	0	0
3	0	0	1	0	1	1
4	1	0	0	1	-1	0

vinden wij o.a. de volgende sneden:

knooppunt-verzameling	som van de betreffende rijen	de snede bevat de takken:
{1}	-1 1 0 0 0 -1	1, 2, 6
{1, 2}	-1 0 -1 -1 0 -1	1, 3, 4, 6
{1, 3, 4}	0 1 1 1 0 0	2, 3, 4

Als $\{k_1\}$ uit r knooppunten bestaat, heeft $\{k_2\}$ $k - r$ knooppunten. Om alle sneden te bepalen is het dus voldoende $\{k_1\}$ te kiezen met niet meer dan $\frac{1}{2}k$ elementen als k even is of $\frac{1}{2}(k - 1)$ elementen als k oneven is.

Op deze wijze kunnen we de snede-tak-incidentiematrix Q_a construeren. Alle sneden van de graph worden gerangschikt en genummerd. De rijen van Q_a corresponderen met de sneden en de kolommen met de takken. Ook in het geval van sneden gebruiken wij het woord "incident". Wij zeggen, dat tak s incident is aan snede r als tak s tot snede r behoort.

Anders is de tak niet incident aan de snede. Bovendien komt volgens de

constructie een plusteken voor als de tak gericht is van een knooppunt in $\{k_1\}$ naar een knooppunt in $\{k_2\}$ en een minteken in het tegenovergestelde geval.

Het is evident, dat behalve in één speciaal geval Q_a de matrix A_a als submatrix bevat. Immers, met uitzondering van een scharnierend knooppunt, alle takken, die aan een bepaald knooppunt incident zijn, vormen een snede. Dat zijn juist de takken, die voor dat knooppunt in de A_a -matrix een niet nul-zijnd element opleveren. Anders is het bij de graphen met een scharnierend knooppunt. Voor een scharnierend knooppunt geldt, dat de verzameling takken, die aan dat knooppunt incident zijn, de vereniging van sneden is, die de verschillende enkelvoudig samenhangende deelgraphen via dat ene knooppunt met de rest van de graph verbinden. Dit wordt geïllustreerd aan de hand van fig.21.

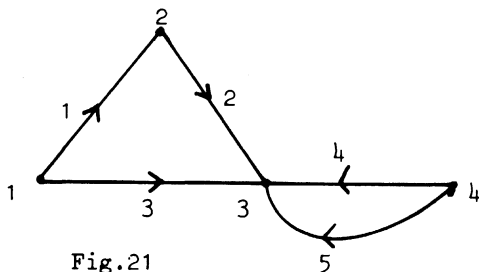


Fig.21

De A_a -matrix is

k \ t	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	0
2	-1	1	0	0	0
3	0	-1	-1	-1	-1
4	0	0	0	1	1

De takken 2 en 3 vormen een snede welke wordt gevonden uit de optellingen van de rijen 1 en 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De takken 4 en 5 vormen de snede die gegeven wordt door rij 4:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De vereniging van deze beide sneden komt overeen met rij 3 van de A_a -matrix.

Een bijzondere submatrix van Q_a is de matrix van sneden, die op één bepaalde boom zijn gebaseerd. Wij noemen deze submatrix basissnede-tak-incidentiematrix. Wij duiden deze met Q aan.

Kiezen wij de snede-rangschikking gelijk aan de boomtak-rangschikking, d.w.z. snede r bevat boomtak r , en kiezen wij de verzameling $\{k_1\}$ zodanig, dat de desbetreffende boomtak van $\{k_1\}$ af gericht is, dan heeft Q de gedaante:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & Q_2 \end{bmatrix};$$

als voorbeeld beschouwen we fig.22.

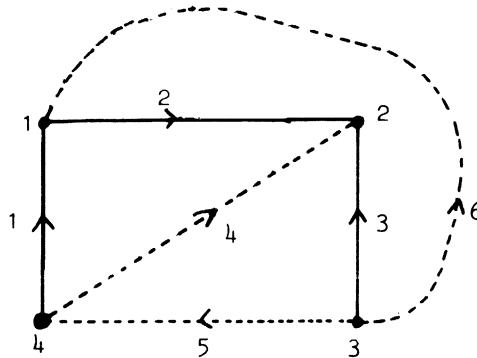


Fig.22

De boom is de takverzameling $\{1, 2, 3\}$.

We vinden:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \{4\} \\ \{1, 4\} \\ \{3\} \end{matrix}$$

waarbij rechts is aangegeven de keuze van $\{k_1\}$, die bij de verschillende sneden behoort.

Stelling 11. De rang van de matrices Q_a en Q van een samenhangende graph is $k - 1$.

Bewijs: Q bevat de eenheidsmatrix van de orde $k - 1$ (het aantal boomtakken); bovendien heeft Q $k - 1$ rijen, zodat de rang $k - 1$ is. Q_a volgt uit A_a door een lineaire transformatie (optelling van rijen), zodat de rang van Q_a niet groter kan zijn

dan de rang van A_a . Maar Q_a bevat Q als submatrix. Derhalve is de rang van Q_a niet kleiner dan $k - 1$. q.e.d.

De A_a -matrix kan als volgt worden verdeeld in submatrices:

$$A_a = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\text{boomtakken}} \\ \xleftrightarrow{\text{koorden}} \end{array} & \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\text{boomtakken}} \\ \xleftrightarrow{\text{koorden}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right] & \begin{array}{c} \updownarrow k - 1 \\ \updownarrow 1 \end{array} \end{array}$$

De laatste rij is lineair afhankelijk van de eerste $k - 1$ rijen.

De submatrix

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\text{boomtakken}} \\ \xleftrightarrow{\text{koorden}} \end{array} & \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\text{boomtakken}} \\ \xleftrightarrow{\text{koorden}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \end{array} \right] & \begin{array}{c} \updownarrow k - 1 \end{array} \end{array}$$

heet de gereduceerde eerste incidentiematrix.

Stelling 12. De matrix A_{11} is niet-singulier.

Bewijs: A_{11} is de incidentiematrix van een boom. Derhalve is de rang gelijk aan $k - 1$. Zij is ook vierkant, zodat zij niet-singulier is. q.e.d.

Opgave 3: Bewijs: $Q = A_{11}^{-1} A = \begin{bmatrix} 1 & A_{11}^{-1} A_{12} \end{bmatrix}$

en leid hieruit af een gemakkelijke procedure om A_{11} te inverteren.

Aanwijzing: Beschouw de lineaire transformaties die ten grondslag liggen aan de vorming van de snede-matrix.

I.4.2. De venster-tak-incidentiematrix C_a .

Deze is alleen mogelijk voor planaire graphen.

We noteren in rij r , kolom s het getal $+1$, als venster r en tak s incident zijn en de positieve omlooprichting dezelfde is als de takrichting

We noteren -1 als venster r en tak s incident zijn en de positieve omlooprichting niet dezelfde is als de takrichting. We noteren 0 als venster r en tak s niet incident zijn.

Voorbeeld: zie fig.23.

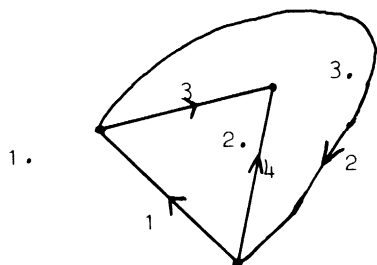


Fig.23

$$C_a = \begin{array}{c|cccc} & t & & & & \\ \hline v & & & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

v = venster

We zien, dat A_a van fig.19 gelijk is aan C_a van fig.23. Dit is te verwachten, daar de graphen dual zijn en de incidentie-relaties tussen takken en knooppunten enerzijds identiek zijn aan de incidentie-relaties tussen takken en vensters anderzijds.

Dus de eigenschappen van C_a zijn dezelfde als de eigenschappen van A_a van de duale graph. In het bijzonder: de rang van C_a is gelijk aan μ , terwijl het aantal vensters gelijk is aan $\mu + 1$ (Stelling 7).

De C_a -matrix kan als volgt worden verdeeld:

$$C_a = \begin{bmatrix} \overset{\mu}{\leftarrow} C_{11} & \overset{t-\mu}{\leftarrow} C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \mu \\ \updownarrow 1 \end{matrix}$$

De matrix

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix}$$

heet gereduceerde venster-tak-incidentiematrix.

Kiezen wij de eerste μ kolommen van C_a overeenkomstig de takken van een co-boom dan is volgens stelling 9 en 12 C_{11} niet singulier.

Opmerking: Tengevolge van dualiteitsbeschouwingen is hier in de C -matrix de boom in achterste positie geplaatst.

Is het begrip dualiteit niet van belang, dan zullen we de boom in voorste positie plaatsen. Er ontstaat dan

$$C = \begin{bmatrix} \overset{t-\mu}{\leftarrow} C_{11} & \overset{\mu}{\leftarrow} C_{12} \end{bmatrix} \updownarrow \mu$$

waarin dan C_{12} vierkant en niet singulier is.

I.4.3. De alle-lussen-tak-incidentiematrix

Wanneer een lus een bepaalde tak bevat, zeggen wij ook dat die lus en die tak incident zijn. Als nu alle mogelijke lussen van een graph worden gerangschikt, kunnen de incidentie-relaties door een matrix worden weergegeven. Wij duiden deze matrix aan met B_a . Aan iedere lus wordt een omlooprichting toegekend. In de matrix wordt +1 genoteerd in rij r, kolom s, als lus r en tak s incident zijn en als de omlooprichting van de lus overeenkomt met de takrichting. Zijn lus r en tak s incident en komen de richtingen niet overeen dan wordt -1 genoteerd. Als lus en tak niet incident zijn, noteren wij 0.

Voorbeeld zie fig.24.

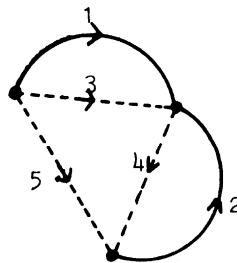


Fig.24

$$B_a = \begin{array}{c|ccccc} & \begin{array}{c} t \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Hierin is voor de lussen gekozen een omlooprichting, overeenkomstig de takrichtingen 3, 4, 5, 3, 3, 4 respectievelijk.

Kiezen wij één bepaalde boom, dan worden de incidentie-relaties van de basislussen t.o.v. deze boom en de takken gegeven door een sub-matrix van de matrix B_a . Als nu de kolommen en rijen van deze sub-matrix zodanig worden geordend, dat de eerste k - 1 kolommen met de boomtakken overeenkomen, basislus k - 1 + r tak k - 1 + r als koorde bevat, zodat de basislussen genummerd worden met k, k + 1, k + 2, ..., k - 1 + μ en de om-

looprichting van basislus r met de richting van tak $k - 1 + r$ overeenkomt, dan ontstaat de basislusmatrix B t.o.v. die boom.

In het voorbeeld vormen de laatste 3 rijen van B_a de B -matrix t.o.v. de boom met takken 1,2. Maar t.o.v. boom $\{4, 5\}$ wordt de B -matrix gevormd uit rijen 3, 5, 1 gevolgd door verwisseling van kolommen 4, 5 met kolommen 1,2,3.

Wij kunnen concluderen dat iedere basislusmatrix uit B_a wordt verkregen door verwisseling van rijen en kolommen van een bepaalde sub-matrix van B_a , eventueel gevolgd door vermenigvuldiging van bepaalde rijen met -1 . (Dit om de omlooprichting van de lussen in overeenstemming met de bijbehorende koorden te brengen). De B -matrix wordt ook de tweede incidentie-matrix genoemd.

Stelling 13. De rang van de B -matrix van een samenhangende graph is μ .

Bewijs: De B -matrix bestaat uit μ rijen en bevat volgens de constructie de eenheidsmatrix van orde μ . Derhalve is de rang van B gelijk aan μ . q.e.d.

Wij zullen nu een bijzonder belangrijk verband tussen de B_a en Q_a matrices leggen waardoor het o.a. mogelijk zal zijn de rang van B_a te bepalen.

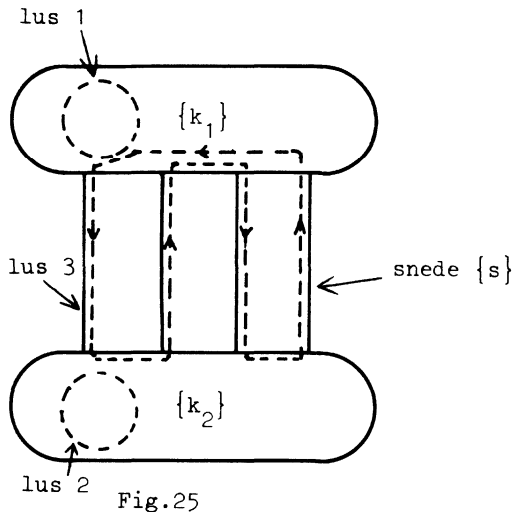
Stelling 14: Wanneer de kolommen van B_a en Q_a gelijk gerangschikt zijn, behoren de rijen van B_a tot het complement van de vectorruimte met als basis de rijen van Q_a . D.w.z. $B_a Q_a' = 0$ dus ook $BQ' = 0$.

Bewijs: Beschouw één bepaalde snede $\{s\}$, die door de disjuncte knooppuntsverzamelingen $\{k_1\}$ en $\{k_2\}$ wordt gedefinieerd. (Fig.25). Beschouw één bepaalde lus $\{l\}$. De verzameling $\{l\}$ bevat knooppunten en takken. Er zijn drie mogelijkheden:

- (i) alle knooppunten van $\{l\}$ behoren tot $\{k_1\}$.
- (ii) alle knooppunten van $\{l\}$ behoren tot $\{k_2\}$.
- (iii) Zowel knooppunten van $\{k_1\}$ als van $\{k_2\}$ behoren tot $\{l\}$.

In gevallen (i) en (ii) heeft $\{l\}$ geen takken gezamenlijk met $\{s\}$, d.w.z. $\{l\} \cap \{s\} = \emptyset$.

In geval (iii) moet $\{l\}$ een aantal takken van $\{s\}$ bevatten: $\{l\} \cap \{s\} \neq \emptyset$. Dit is als volgt te zien. Wij schrijven de rij knooppunten op die de lus aangeeft, met als eerste lid



van de rij een knooppunt van $\{k_1\}$. Het laatste knooppunt van de rij moet hetzelfde als de eerste zijn. Elke overgang van een knooppunt van $\{k_1\}$ naar een knooppunt van $\{k_2\}$ moet worden gevolgd, ergens verder in de rij, door een overgang van $\{k_2\}$ naar $\{k_1\}$. Het is b.v. onmogelijk dat twee overgangen van $\{k_1\}$ naar $\{k_2\}$ elkaar opvolgen in de rij van overgangen. Anders is het niet mogelijk bij een knooppunt in $\{k_1\}$ te beginnen en te eindigen.

Hieruit volgt, dat $\{1\} \cap \{s\}$ een even aantal takken bevat.

Bovendien wordt de helft van deze takken doorlopen in dezelfde richting als voor de snede is afgesproken en de helft in de tegengestelde richting. Derhalve hebben de rij van Q_a die met $\{s\}$ correspondeert en de rij van B_a die met $\{1\}$ correspondeert de volgende gedaante.

$$\begin{aligned} \{s\} & [\dots\alpha\dots\beta\dots\gamma\dots\delta\dots] \\ \{1\} & [\dots\alpha\dots-\beta\dots\gamma\dots-\delta\dots] \end{aligned}$$

waarbij alleen de takken van $\{s\} \cap \{1\}$ zijn genoteerd.

Voor alle andere takken komt er in een of beide vectoren een nul voor. Het volgt dat het inwendig product van de twee vectoren gelijk is aan $\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 \dots = 0$, daar $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots = \pm 1$. Derhalve behoren de rijen van B_a tot het complement van de vectordeelruimte, die door de rijen van Q_a is opgespannen. q.e.d.

Voorbeeld:

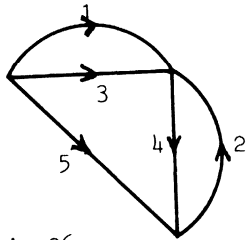


Fig.26

$$B_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} Q_a B'_a = 0.$$

In de volgende hoofdstukken zullen wij deze zeer belangrijke orthogonaliteitseigenschap en de elektrische gevolgen daarvan in allerlei vormen terug vinden.

Voorlopig beperken wij ons tot de volgende consequentie van stelling 14.

Stelling 15. De rang van de matrix B_a van een samenhangende graph is μ .

Bewijs: Daar de rang van Q_a $k - 1$ is, kan t.g.v. stelling 14 de rang van B_a niet groter dan $t - k + 1 = \mu$ zijn (ongelijkheid van Sylvester). Maar B_a bevat de matrix B of een niet-singuliere transformatie van B (overeenkomend met rij en kolom permutaties, resp. vermenigvuldiging van rijen met -1) als een sub-matrix. Daar de rang van B μ is, is ook de rang van B_a niet minder dan μ . Derhalve is de rang van B_a gelijk aan μ . q.e.d.

Stelling 16. De matrices Q en B van een samenhangende graph, t.o.v. dezelfde boom, en waarbij de boomtakken in de eerste $k - 1$ kolommen zijn gerangschikt, kunnen worden geschreven

$$Q = \begin{bmatrix} 1_{k-1} & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{k-1} & -B'_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 1_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q'_2 & 1_\nu \end{bmatrix}$$

Bewijs: $BQ' = \begin{bmatrix} B_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Q'_2 \end{bmatrix} = 0$. Derhalve is $Q_2 = -B'_1$. q.e.d.

Uit de voorgaande stellingen volgt nu, dat een groot deel van de eigenschappen van de graph kunnen worden gevat in de matrix B_1 . In het vervolg zullen wij veel met deze matrix te doen hebben.

Nog een gevolg van stelling 14 is het feit dat voor elke twee matrices die uit B_a en Q_a door rij-operaties volgen ook de orthogonaliteits-eigenschap geldt. B.v.

$$AB'_a = 0 \quad , \quad Q_a C' = 0 \quad \text{of} \quad AC' = 0 \quad \text{enz.}$$

Het is interessant nogmaals te bekijken hoe de theorie is opgebouwd. De stap van A naar Q_a en het bepalen van de rang van Q_a waren vrij eenvoudig. Daar tegenover moesten wij om de rang van B_a te bepalen een omweg volgen. Een direct bewijs van de rang van B_a is niet gemakkelijk te leveren. Dit gebrek aan symmetrie ondanks de sterke overeenkomst in de structuren van B_a en Q_a komt doordat een graph in het algemeen geen duale graph heeft.

Als een gegeven matrix de Q_a -matrix van een graph is, kan het heel goed mogelijk zijn dat er geen graph bestaat waarvan de gegeven matrix de B_a -matrix is.

Alleen in het geval van planaire graphen waar de weg via de C -matrix mag worden bewandeld, kan de theorie van de B -matrix op precies analoge wijze als bij de Q -matrix worden opgebouwd. Wij laten echter deze ontwikkeling aan de geïnteresseerde lezer over.

II. SYSTEMATISCHE BEREKENING VAN ELEKTRISCHE NETWERKEN OP BASIS VAN DE GRAPHTHEORIE.

II.1. De wetten van Kirchhoff.

Stel, dat in een elektrisch netwerk de positieve stroomrichting overeenkomt met de takrichting van de bijbehorende graph, dan kan de stroomwet van Kirchhoff worden geschreven als

$$\underline{A}\underline{i} = 0, \quad (1)$$

waarin \underline{i} de kolommatrix van de tijdafhankelijke takstromen is, die overeenkomstig de kolomordening van \underline{A} zijn gerangschikt. Bedenken wij, hoe iedere rij van \underline{A} is opgebouwd, dan is direct in te zien dat (1) inderdaad alle stroomrelaties volgens de stroomwet van Kirchhoff weergeeft.

Voorbeeld: Voor fig.19 is met behulp van de \underline{A} -matrix af te lezen:

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 &= 0 \\ -i_1 - i_3 + i_4 &= 0. \end{aligned}$$

Uit hoofdstuk I weten wij, dat (1) equivalent is aan

$$\underline{Q}\underline{i} = 0, \quad (2)$$

$$\text{of } \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (3)$$

waarin \underline{i}_1 de kolommatrix van de boomtakstromen en \underline{i}_2 de kolommatrix van de koordestromen is.

Dus

$$\underline{i}_1 = -\underline{Q}_2\underline{i}_2 = \underline{B}'_1\underline{i}_2. \quad (4)$$

Het is van belang te realiseren, dat de equivalente vormen (2) en (4) alle informatie bevatten, die uit de stroomwet van Kirchhoff te putten is. Ook de fysische interpretatie van (2) moet niet uit het oog worden verloren. Iedere (scalaire) vergelijking uit het stelsel van (2) heeft betrekking op een snede, die twee deelnetwerken N_1 en N_2 verbindt. De algebraïsche som van de stromen in de takken van deze snede, die van N_1 naar N_2 vloeien, is gelijk aan nul. Volgens dit principe stelt men direct de \underline{Q} -matrix op en niet door uit te gaan van de \underline{A} -matrix door optellen van rijen.

Voorbeeld: fig.27.

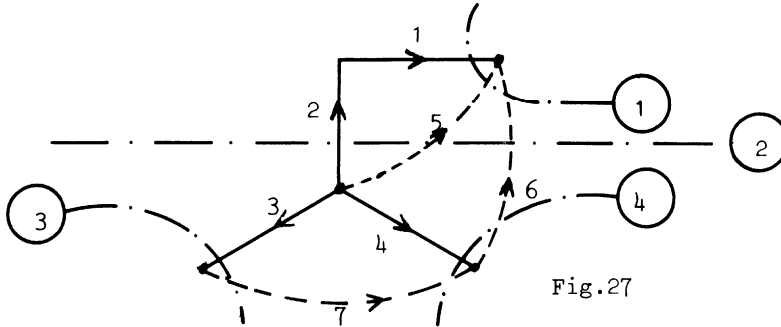


Fig.27

Hierin zijn de boomtakken 1, 2, 3 en 4 aangegeven door getrokken lijnen, terwijl de koorden 5, 6 en 7 zijn gestippeld. De streepstiplijnen geven de sneden aan. De sneden krijgen hetzelfde rangnummer als de boomtakken. Bedenken wij, dat de som van de stromen in de snede nul is en kiezen wij als positieve richting de richting van de boomtak dan ontstaat rechtstreeks de Q -matrix met de eenheidsmatrix in eerste positie:

$$Q = \begin{array}{c|cccc|ccc} & t & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline bs & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \quad \text{bs = basisnede}$$

Voor graphen van kleine omvang is deze manier rechtstreeks te gebruiken, voor grotere graphen zijn vaak de sneden moeilijk te vinden. Dan kan men beter de B -matrix opstellen en daaruit via de formule $Q_2 = -B'_1$ de Q -matrix afleiden.

Voorbeeld: fig.28.

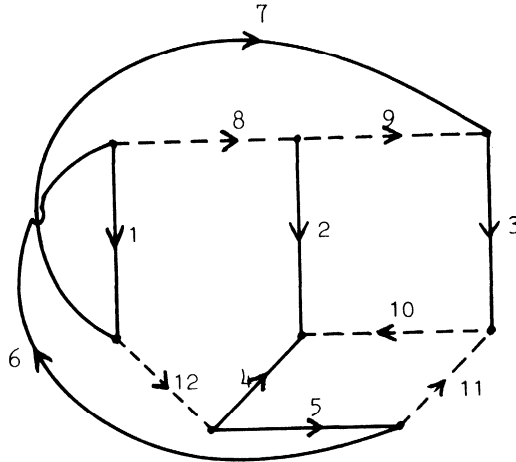


Fig.28

Het aantal boomtakken is 7. Deze zijn in de figuur aangegeven door getrokken lijnen. De koorden zijn gestippeld. We stellen de B -matrix op:

$$B = \begin{array}{c|cccccccc|cccc} \begin{array}{c} t \\ \hline \text{bl} \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 8 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Hieruit volgt de Q -matrix: ($Q_2 = -B_1'$)

t = tak

bl = basislus

t bs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1
2	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	-1	1	-1	0	-1
6	0	0	0	0	0	1	0	-1	1	-1	1	-1
7	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	1	0

bs = basissnede

Om de spanningswet van Kirchhoff op een dergelijke manier op te schrijven, spreken wij eerst af, dat de positieve spanningspolariteit voor iedere tak zodanig wordt gekozen, dat de pijl, die de positieve stroomrichting aangeeft, gericht is van het knooppunt met hogere naar het knooppunt met lagere potentiaal, wanneer de takspanning positief is. Met deze afspraak geeft de takrichting de positieve spanningspolariteit eenduidig aan, zie fig.29.

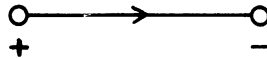


Fig.29

We kunnen nu de spanningswet van Kirchhoff schrijven als

$$B_a \underline{u} = 0, \tag{5}$$

waarin \underline{u} de vector van de tijdafhankelijke takspanningen is, op dezelfde manier geordend als de kolommen van B_a . Uit de constructie van B_a volgt, dat (5) inderdaad de spanningsrelaties van alle lussen weergeeft.

Uit hoofdstuk I volgt, dat (5) equivalent is aan

$$B_u = 0, \tag{6}$$

of

$$\begin{bmatrix} B_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (7)$$

$$\text{dus } u_2 = -B_1 u_1 = Q_2' u_1. \quad (8)$$

Deze vergelijkingen bevatten alle informatie, die uit de spanningswet van Kirchhoff te putten is. Men lette goed op het onderlinge verband tussen (4) en (8), die wij als de standaard-vorm van de wetten van Kirchhoff kunnen beschouwen.

Voorbeeld: voor fig.26 is met behulp van de B -matrix af te lezen:

$$\begin{aligned} -u_1 + u_3 &= 0 \\ u_2 + u_4 &= 0 \\ -u_1 + u_2 + u_5 &= 0. \end{aligned}$$

Als de graph planair is, is (5) ook equivalent aan

$$C u = 0, \quad (9)$$

$$\text{of } C_{11} u_1 + C_{12} u_2 = 0,$$

$$\text{dus } u_2 = -C_{12}^{-1} C_{11} u_1. \quad (10)$$

Vraag: Waarom is C_{12} niet-singulier?

Vergelijking (10) is bij planaire netwerken equivalent aan (8).

II.2. Formulering van het netwerkprobleem

Een netwerk bestaat uit t takken waaronder een aantal brontakken. Het hoofdprobleem van de lineaire netwerktheorie, waarmee wij ons in dit college zullen bezig houden, is het berekenen van alle takstromen en takspanningen wanneer de bronsterkten gegeven zijn. Dit probleem en zijn oplossing en alle aspecten hiervan maken deel uit van de netwerkanalyse. De netwerkanalyse is de verzameling van technieken die men ter beschikking heeft om het complete gedrag van een netwerk te bepalen wanneer dat netwerk volledig is gespecificeerd.

De eerste vraag, die wij in dit verband moeten beantwoorden is: heeft zo'n netwerkprobleem een oplossing?

Dit lijkt misschien een wat overdreven academische vraag, maar zoals wij straks zullen zien is de vraag van een zuiver technisch standpunt bezien niet overbodig. Het niet bestaan van een oplossing van een theoretisch vraagstuk is een sterke aanwijzing dat er ook technisch iets bijzonders aan de hand is.

De tweede vraag, die wij moeten beantwoorden is: als een oplossing bestaat, is die eenduidig? D.w.z. zijn er meer oplossingen mogelijk? Zo ja, hoeveel oplossingen zijn er?

Tenslotte moeten wij de vraag beantwoorden: hoe kunnen wij de oplossing(en) zo systematisch en efficiënt mogelijk berekenen?

Deze vragen komen in dit en de volgende hoofdstukken voortdurend naar voren. In dit hoofdstuk zullen wij onze beschouwing beperken tot netwerken opgebouwd uit bronnen, weerstanden, condensatoren en spoelen. In een later hoofdstuk zullen netwerken met transformatoren aan de orde komen. Bovendien beperken wij ons hier tot het geval, dat alle takstromen en -spanningen exponentiële functies van de tijd zijn met dezelfde exponent. Voor dit geval betekent de bewering dat het netwerkprobleem een oplossing heeft het volgende: Er bestaat een verdeling van stromen en spanningen in het netwerk, die alle exponentieel met de tijd variëren en dezelfde exponent bezitten; bovendien kan deze verdeling worden berekend.

Wij hebben reeds gezien, dat de wetten van Kirchhoff $(k - 1) + \mu = t$ onafhankelijke vergelijkingen opleveren. Bovendien kunnen wij ook van iedere tak een vergelijking opschrijven, nl. van de vorm

$Ue^{\lambda t} = Z \cdot Ie^{\lambda t}$, of van de vorm $u(t) = U_0 e^{\lambda t}$, $i(t) = I_0 e^{\lambda t}$ waarbij U_0 en I_0 gegeven bronsterkten zijn.

Dit geeft dus t vergelijkingen erbij, zodat wij in totaal $2t$ vergelijkingen met $2t$ onbekenden hebben. Wij moeten deze vergelijkingen in principe kunnen oplossen. Dat zal echter alleen mogelijk zijn als de $2t$ vergelijkingen onafhankelijk en niet strijdig zijn.

Beschouw nu de twee voorbeelden van fig.30.

Fig.30.

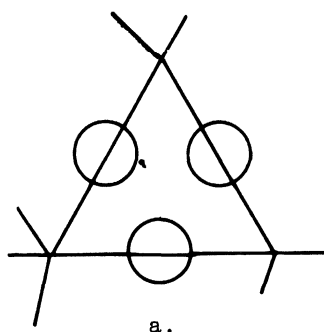
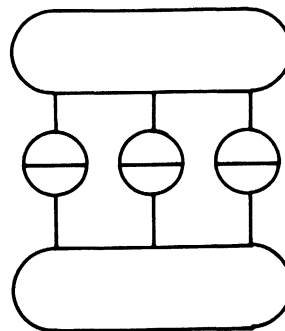


Fig.30



Figuur 30a geeft een deelnetwerk aan, dat uit een lus van spanningsbronnen bestaat. Voor zo'n lus mogen de bronsterkten niet willekeurig worden gekozen; anders is het niet mogelijk aan de spanningswet van Kirchhoff te voldoen. Dit betekent dat één van de bronsterkten afhankelijk van de rest moet zijn, zodat het aantal onafhankelijke takvergelijkingen van het netwerk minder dan t is. Als dit de enige lus van spanningsbronnen in het hele netwerk is, zijn er slechts $2t - 1$ onafhankelijke vergelijkingen zodat niet alle takspanningen en -stromen kunnen worden bepaald. Wij vinden in zo'n geval dat één van de stromen, die door de spanningsbronnen vloeien, willekeurig is; de andere stromen kunnen in principe in de bronsterkte en in deze willekeurige stroom worden uitgedrukt. M.a.w. wij kunnen ons voorstellen dat een fictieve lusstroom van willekeurige sterkte in de lus vloeit. Dit betekent, dat er dan oneindig veel stroom- en spanningsverdelingen zijn die aan de netwerkvergelijkingen voldoen.

Figuur 30b toont de duale situatie, nl. een snede van stroombronnen. Hier kunnen de stroombronsterkten niet alle willekeurig worden gekozen, zonder in strijd te komen met de stroomwet van Kirchhoff. Het gevolg is, dat wij in totaal niet meer dan $2t - 1$ onafhankelijke niet-strijdige vergelijkingen hebben. Niet alle takspanningen kunnen worden bepaald. Eén van de spanningen over de stroombronnen kan willekeurig worden ge-

kozen, terwijl de andere in principe in deze spanning en de bronsterkten kunnen worden uitgedrukt. Wij kunnen ons voorstellen dat een fictieve "snede-spanning" van willekeurige grootte over de snede bestaat. Op het begrip "snede-spanning" zullen wij later terugkomen. Ook in dit geval kunnen wij zeggen dat er oneindig veel stroom- en spanningsverdelingen bestaan, die aan de netwerkvergelijkingen voldoen.

Technisch bezien, kunnen bij een lus van fysische apparaten, die alle goed door spanningsbronnen kunnen worden voorgesteld, zeer grote stromen in de bronnen ontstaan, zodat een toch aanzienlijk vermogen in de altijd aanwezige inwendige weerstanden van de apparaten wordt gedissipeerd. Dit kan tot ernstige gevolgen voor de apparaten leiden. De reden voor deze grote stromen is dat in de praktijk de som van de bronsterkten nooit exact nul is. De conclusie op technische gronden is, dat soortgelijke configuraties i.h.a. moeten worden vermeden.

Evenzo bij een netwerk met een snede van apparaten die door stroombronnen goed voorgesteld kunnen worden, kunnen grote spanningen over de takken van de snede bestaan. Eveneens kan dit tot ernstige gevolgen voor de apparaten leiden. Bij elektronische meetschakelingen kan men bovendien allerlei ongewenste stooreffecten krijgen, die een gevoelige meting volkomen teniet kunnen doen. Op deze gronden zal men ook deze configuratie i.h.a. trachten te vermijden.

II.3. De oplossing van een netwerkprobleem met behulp van de B -matrix.

Uit het voorgaande volgt, dat een netwerkprobleem geen eenduidige oplossing kan hebben als het netwerk lussen van spanningsbronnen of sneden van stroombronnen bevat. In reële technische zin heeft het probleem onder deze omstandigheden in het geheel geen oplossing, daar het niet mogelijk is te bepalen hoe het netwerk zich zal gedragen.

In het vervolg sluiten wij deze twee configuraties uit. Het is nu mogelijk een zodanige boom in de graph van een netwerk N te kiezen, dat alle spanningsbronnen tot de verzameling van boomtakken en alle stroombronnen tot de verzakeling van koorden behoren. Dit is als volgt te zien. Als alle stroombronnen worden verwijderd is het resulterend netwerk N_1 samenhangend, daar er geen snede van stroombronnen bestaat.

In dit samenhangende netwerk kunnen wij een boom als volgt kiezen. De spanningsbronnen en hun incidentie knooppunten vormen een aantal eventueel niet onderling samenhangende deelnetwerken, die geen lussen bevatten. Wij voegen impedantietakken aan deze verzameling van deelnetwerken toe totdat een samenhangend netwerk ontstaat, dat alle knooppunten van N_1 , maar geen lus bevat. Zodoende ontstaat een boom van N_1 , die alle spanningsbronnen bevat. Daar N_1 samenhangend is, is deze constructie altijd mogelijk.

Later zal blijken, dat bovendien een bepaalde keuze van de impedantie-boomtakken de voorkeur verdient, nl. die, waarbij eerst zoveel mogelijk condensatoren in de boom worden opgenomen, daarna (eventueel) aangevuld met weerstanden in de boom en tenslotte (eventueel) spelen in de boom. Deze hele procedure is wel op een rekentuig te programmeren zodanig dat altijd een boom van de gewenste vorm resulteert.

Zoals reeds gesteld is, beperken wij ons in dit hoofdstuk tot het geval dat alle spanningen en stromen exponentiële functies van de tijd zijn:

$$\underline{i} = \underline{I}e^{\lambda t} \text{ en } \underline{u} = \underline{U}e^{\lambda t}, \text{ met } \underline{I} \text{ en } \underline{U} \text{ complex. We kunnen dan schrijven}$$

$$\underline{\dot{i}} = \underline{I}e^{\lambda t} \text{ en } \underline{\dot{u}} = \underline{U}e^{\lambda t},$$

waarin \underline{U} en \underline{I} kolommatrices van U en I zijn.

Uit $\underline{B}\underline{u} = \underline{0}$ volgt dan $\underline{B}\underline{U} = \underline{0}$. (11)

We verdelen nu de B - en U -matrices als volgt:

$$U = \begin{bmatrix} U_v \\ U_z \\ U_c \end{bmatrix} \quad (12)$$

- hierin duidt aan: v de spanningsbronnen
 z " impedanties
 c " stroombronnen
 μ " koorden
 l " impedantiekoorden

Dezelfde indices worden ook gebruikt om het type van takken aan te duiden. Bijvoorbeeld B_{1v} is dat deel van B waarin de incidentie-relaties tussen de basislussen, die door de impedantiecoorden worden bepaald, en de spanningsboomtakken worden uitgedrukt.

De eenheidsmatrix omvat de kolommen 1 en c.

Uit (11) en (12) volgt o.a.

$$B_{1v} U_v + B_{1z} U_z = 0 \quad (13)$$

$$\text{Uit } QI = 0 \text{ volgt } \begin{bmatrix} 1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = 0$$

De index 1 heeft betrekking op de boomtakken

De index 2 heeft betrekking op de coorden.

$$\text{Dus } I_1 = -Q_2 I_2 = B'_1 I_2$$

$$\text{dus } \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_1 \\ 1 \end{bmatrix} I_2 = B' I_2$$

$$\text{dus } \begin{bmatrix} I_v \\ I_z \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_{1v} & B'_{cv} \\ B'_{1z} & B'_{cz} \\ 0 & 1_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_c \end{bmatrix}.$$

Hierbij moeten wij bedenken dat coorden worden aangeduid zowel met index 2 als met de twee indexen 1 en c, daar de impedantiecoorden en de stroombronnen tezamen de coorden vormen.

$$\text{dus } I_v = B'_{1v} I_1 + B'_{cv} I_c \quad (14)$$

$$I_z = B'_{1z} I_1 + B'_{cz} I_c \quad (15)$$

$$\text{Verder is } U_z = Z I_z \quad (16)$$

waarin Z de diagonaalmatrix van alle impedanties is.

Uit (15) en (16) volgt

$$U_z = Z B'_{1z} I_1 + Z B'_{cz} I_c$$

en met (13) volgt

$$B_{1v} U_v + B_{1z} Z B'_{1z} I_1 + B_{1z} Z B'_{cz} I_c = 0$$

$$\boxed{I_1 = -(B_{1z} Z B'_{1z})^{-1} \{B_{1v} U_v + B_{1z} Z B'_{cz} I_c\}} \quad (17)$$

MITS DE TE INVERTEREN MATRIX NIET-SINGULIER IS.

Wij komen op deze matrix-inversie in een latere paragraaf terug.

Uit (11) en (12) volgt tenslotte

$$U_c = -B_{cv} U_v - B_{cz} U_z$$

dus
$$\boxed{U_c = -B_{cv} U_v - B_{cz} Z B'_{1z} I_1 - B_{cz} Z B'_{cz} I_c} \quad (18)$$

Met formule (17) worden de onbekende impedantiekoordestromen uitgedrukt in de bekende spanningen U_v en de bekende stromen I_c .

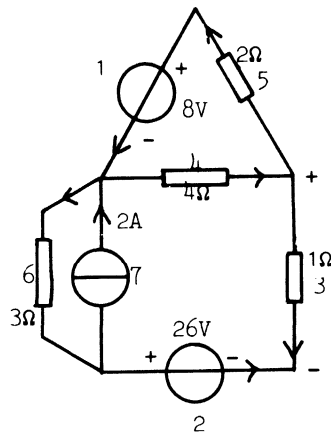
Met (14) vinden we de onbekende spanningsbronstromen.

Met (18) vinden we de onbekende stroombronspanningen.

Met (15) vinden we alle impedantiestromen.

Met (16) vinden we alle impedantiespanningen.

Voorbeeld (fig.31):



Hierin is:

$$\mu = 3$$

$$c = 1$$

$$k - 1 = 4$$

$$v = 2$$

$$l = 2$$

Stel:

$$U_1 = 8V$$

$$U_2 = 26V$$

$$I_7 = 2A$$

Fig. 31

		boom				koorden		
t	bl	1	2	3	4	5	6	7
4		1	0	0	1	1	0	0
5		0	1	-1	-1	0	1	0
6		0	-1	1	1	0	0	1

$B =$

$$B_{1z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Hier wordt het produkt } B_{1z} Z \text{ be-} \\ \text{rekend. We voeren dit uit door de} \\ \text{matrix } B_{1z} \text{ en de hoofddiagonaal} \\ \text{van } Z \text{ onder elkaar op te schrijven.} \\ \text{De elementen van elke rij van } B_{1z} \\ \text{worden nu vermenigvuldigd met de} \\ \text{overeenkomstige elementen van de} \\ \text{hoofddiagonaal van } Z. \text{ We geven dit} \\ \text{aan met } x. \end{array} \right\} x$$

$$B_{1z} Z = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Hier wordt het produkt } (B_{1z} Z) B'_{1z} \\ \text{berekend. Onder de matrix } B_{1z} Z \\ \text{schrijven we } B'_{1z} \text{ weer op. We ver-} \\ \text{menigvuldigen nu de elementen van} \\ \text{een rij van de bovenste matrix met} \\ \text{de overeenkomstige elementen van} \\ \text{een rij van de onderste matrix en} \\ \text{tellen het resultaat op. Dit doen} \\ \text{we voor alle rijen.} \end{array} \right\} x +$$

We geven dit aan met x+.

$$B_{1z} Z B'_{1z} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow (B_{1z} Z B'_{1z})^{-1} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{cz} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x +$$

$$B_{1z} Z B'_{cz} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} \rightarrow B_{1z} Z B'_{cz} I_c = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} \quad 2$$

$$B_{1v} U_v = 1 \begin{bmatrix} 8 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 26 \end{bmatrix}$$

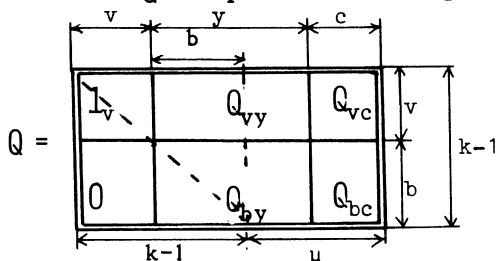
$$\begin{bmatrix} I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = I_1 = -\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Opgave: Bepaal aan de hand van vergelijkingen (14) t/m (18) alle tak-
stromen en -spanningen in het netwerk.

II.4. De oplossing van een netwerkprobleem met de Q-matrix.

Uit $Q_i = 0$ volgt $QI = 0$.

We verdelen de Q- en I-matrix als volgt:



$$I = \begin{bmatrix} I_v \\ I_y \\ I_c \end{bmatrix} \quad (19)$$

Hierin duidt aan:

- v de spanningsbronnen
- y de admittanties
- c de stroombronnen
- k de knooppunten
- b de admittantieboomtakken.

Uit (19) en (20) volgt o.a.

$$Q_{by} I_y + Q_{bc} I_c = 0. \quad (21)$$

Uit (11) volgt $\begin{bmatrix} B_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = 0$.

De index 1 heeft betrekking op de boom.
 De index 2 heeft betrekking op de koorden.

$$-B_1 U_1 = U_2 \quad \text{dus} \quad U_2 = Q'_2 U_1$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Q'_2 \end{bmatrix} U_1 = Q' U_1$$

$$\begin{bmatrix} U_v \\ U_y \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q'_{vy} & Q'_{by} \\ Q'_{vc} & Q'_{bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_v \\ U_b \end{bmatrix}$$

$$\boxed{U_c = Q'_{vc} U_v + Q'_{bc} U_b} \quad (22)$$

$$\boxed{U_y = Q'_{vy} U_v + Q'_{by} U_b} \quad (23)$$

Verder is $\boxed{I_y = Y U_y}$ (24)

waarin Y de diagonaalmatrix van alle admittanties is.

Uit (23) en (24) volgt

$$I_y = Y Q'_{vy} U_v + Y Q'_{by} U_b$$

en met (21)

volgt $Q_{by} Y Q'_{vy} U_v + Q_{by} Y Q'_{by} U_b + Q_{bc} I_c = 0$ zodat

$$U_b = -(Q_{by} Y Q'_{by})^{-1} \{Q_{bc} I_c + Q_{by} Y Q'_{vy} U_v\} \tag{25}$$

MITS DE TE INVERTEREN MATRIX NIET-SINGULIER IS.

Wij komen later op deze matrix-inversie terug.

Uit (19) en (20) volgt

$$I_v = -Q_{vy} I_y - Q_{vc} I_c$$

dus $I_v = -Q_{vy} Y Q'_{vy} U_v - Q_{vy} Y Q'_{by} U_b - Q_{vc} I_c$ (26)

Op blz. 81 wordt een overzicht van alle formules gegeven.

II.5. De keuze tussen de B- en de Q-methode.

Bij de B-methode is de te inverteren matrix van de orde l.

Bij de Q-methode is de te inverteren matrix van de orde b.

Dus als $l < b$ kiezen we de B-methode,

of als $\mu - c < k - 1 - v$ kiezen we de B-methode.

Let op: met de B-methode worden stromen gevonden.

met de Q-methode worden spanningen gevonden!

Voorbeeld: fig.31 en 32

	$\begin{matrix} t \\ \hline bts \end{matrix}$	1	2	$\overbrace{3 \quad 4}^b$	5	6	7
Q =	1	1	0	0	0	-1	0
	2	0	1	0	0	0	-1
	3	0	0	1	0	0	1
	4	0	0	0	1	-1	1

verifieer $Q_2 = -B'_1$

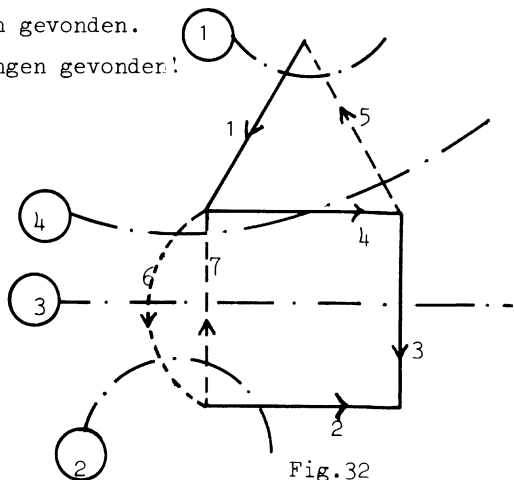


Fig.32

$$Q_{by} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times$$

$$Q_{by} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$Q_{by} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times +$$

$$Q_{by} Y Q'_{by} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow [Q_{by} Y Q'_{by}]^{-1} = \frac{12}{192} \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$Q_{vy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times +$$

$$Q_{by} Y Q'_{vy} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}; Q_{by} Y Q'_{vy} U_v = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{26}{3} \\ -\frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

$$Q_{bc} I_c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = U_b = \frac{-1}{16} \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-32}{3} \\ \frac{-20}{3} \end{bmatrix} &= \frac{-1}{48} \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -32 \\ -20 \end{bmatrix} = \frac{-1}{12} \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 84 \\ 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Opgave:

Bepaal aan de hand van (22) t/m (26) alle takstromen en spanningen in het netwerk en controleer of de resultaten dezelfde zijn als die van § II.3.

II.6 Stelling 17. Voor alle λ , behalve voor een eindig aantal discrete waarden, zijn de matrices B_{lz} , Z , B'_{lz} en Q_{by} , Y , Q'_{by} niet-singulier.

Bewijs: We maken gebruik van de stelling van Binet-Cauchy. Deze luidt als volgt:

Gegeven de matrices D van de orde $m \times m$, E van de orde $m \times p$ en F van de orde $p \times m$, waarbij

$$D = E \cdot F$$

dan is $\det D$ de som van de produkten van alle mogelijke minoren (onderdeterminanten) van de m -de orde van E en de overeenkomstige minoren van F .

Overeenkomstig wil zeggen, dat een minor van F wordt gevormd uit kolommen met dezelfde nummers en met behoud van de volgorde, als de rijen (met behoud van de volgorde), waaruit de minor van E is gevormd.

Verder is m de hoogste orde minor van E en van F .

Voorbeeld:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|EF| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \\
& + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \\
& + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0 + 2 + 0 + 3 + \\
& + 12 + 0 + 18 + \\
& + 8 - 2 + 4 \\
& = 45
\end{aligned}$$

Berekenen we de matrix D dan vinden we

$$D = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

waarvan de determinant 45 is in overeenstemming met de ontwikkeling volgens Binet-Cauchy.

Stel nu dat alle R , L , $1/C > 0$ en dat λ reëel en positief is. Dan is $Z = M^2$, waarin M een diagonaal-matrix is waarvan ieder element de wortel uit het corresponderende element van Z is. Bovendien is ieder element van M positief.

$$\text{Derhalve is } B_{1Z} Z B'_{1Z} = B_{1Z} M M B'_{1Z} = E E'$$

$$\text{waarin } E = B_{1Z} M, \text{ en } E' = M' B'_{1Z} = M B'_{1Z} \text{ daar}$$

M diagonaal is. Verder is E reëel.

Derhalve is volgens de stelling van Binet-Cauchy

$$\det (E E') = \sum_m \Delta_m^2$$

waarin Δ_m een typische minor van E van orde 1 is, die ook gelijk aan de corresponderende minor van E' is.

Daar iedere kolom van E of constant is of $\lambda^{\frac{1}{2}}$ of $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ als factor bevat, is $\det (E E') = \sum_m \delta_m^2 \lambda^{r_m}$ met r_m een geheel getal, waarin δ_m de minor Δ_m is als $\lambda = 1$.

Maar M is niet-singulier en de rang van B_{1z} is 1, zodat de rang van E ook 1 is. Derhalve zijn niet alle δ_m gelijk aan nul. D.w.z. $\det (E E') \neq 0$. Bovendien kunnen wij stellen dat deze determinant niet nul kan zijn voor alle λ reëel en positief daar de coëfficiënten van λ in deze polynoom alle reëel en niet-negatief zijn.

Als λ complex is, vinden wij dezelfde uitdrukking voor de determinant daar deze opgebouwd is door dezelfde operaties van optelling en vermingvuldiging als bij een reële positieve λ . De polynoom in λ die hierdoor resulteert heeft n nulpunten waarin n de graad is. Alleen bij deze waarde van λ is de polynoom nul, d.w.z. alleen voor deze waarden van λ is de matrix $B_{1z} Z B'_{1z}$ singulier.

Precies analoge beschouwingen gelden voor de matrix

$$Q_{by} Y Q'_{by} \quad \text{q.e.d.}$$

Vragen: Waarom is het essentieel dat $R, L, 1/C > 0$?

Kunnen sommige elementen nul zijn ?

Welke voorwaarden moeten gelden bij de Q -methode ?

Wat gebeurt er als sommige elementen negatief zijn ?

Met het aangeven van deze twee rekenprocedures is aangetoond dat het netwerkprobleem een oplossing heeft; bovendien is slechts één oplossing mogelijk. Stel dat er twee verschillende vectoren I_{1_1}, I_{1_2} bestaan, die bij dezelfde waarden van bronsterkten aan de netwerkvergelijkingen voldoen. Dan geldt volgens de vergelijking voorafgaande aan (17)

$$B_{1v} U_v + B_{1z} Z B'_{1z} I_{1_1} + B_{1z} Z B'_{cz} I_c = 0$$

$$B_{1v} U_v + B_{1z} Z B'_{1z} I_{1_2} + B_{1z} Z B'_{cz} I_c = 0$$

zodat

$$(B_{1z} Z B'_{1z})(I_{1_1} - I_{1_2}) = 0.$$

Dit is slechts dan mogelijk als $B_{1z} Z B'_{1z}$ singulier is; dit is in tegenspraak.

Derhalve voldoet slechts één vector I_1 aan de netwerkvergelijkingen. Daar alle andere stromen en spanningen ondubbelzinnig in I_1, U_v, I_c worden uitgedrukt is ook voor ieder van deze variabelen slechts één waarde mogelijk die aan de netwerkvergelijkingen voldoet.

Precies analoge beschouwingen gelden voor de Q-methode.

II.7. De oplossing van een netwerkprobleem met de A-matrix (knooppuntsmethode).

Wij hebben in E.N.I. gezien, dat een takspanning het verschil van de potentialen van de eindpunten van de tak is. Voor een lus moet gelden $\sum u = 0$ met inachtneming van reeds eerder besproken tekenafspraken. Dus (zie fig.33) geldt:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0$$

zodat

$$v_1 - v_2 + v_2 - v_3 + \dots + v_n - v_1 = 0.$$

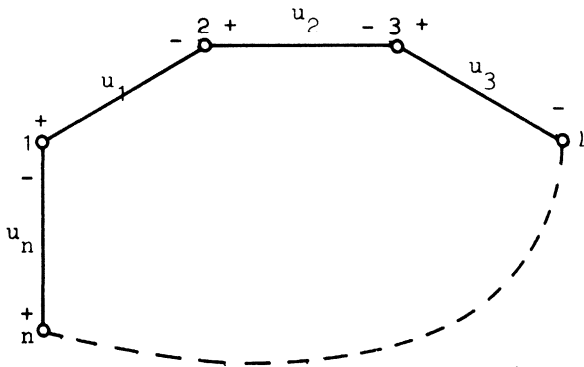


Fig.33

Bij het omzetten van spanningen in verschillen van knooppuntspotentialen wordt automatisch voldaan aan de spanningswet van Kirchhoff.

We beschouwen nu een boom van de graph van een netwerk (fig.34).

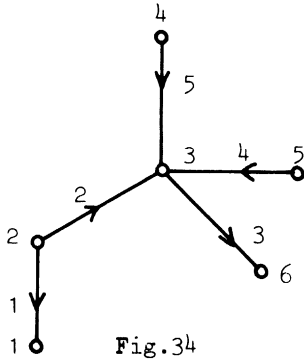


Fig.34

We lezen af:

$$v_2 = v_1 + u_1$$

$$v_3 = v_2 - u_2 = v_1 + u_1 - u_2$$

$$v_6 = v_3 - u_3 = v_1 + u_1 - u_2 - u_3$$

enz.

Dus alle potentialen zijn uit te drukken in de potentiaal van één knooppunt v_1 (referentieknooppunt) en in de boomtakspanningen.

Eén potentiaal is vrij te kiezen.

Andersom is $u_1 = v_2 - v_1$

$$u_2 = v_2 - v_3$$

$$u_3 = v_3 - v_6$$

enz.

Deze betrekkingen zijn m.b.v. matrices te schrijven.

Beschouw fig.35.

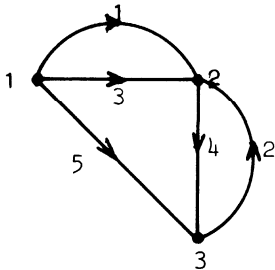


Fig.35

		boom		co-boom			
		1	2	3	4	5	
k	t	1	0	1	0	1	k - 1
	2	-1	-1	-1	1	0	
	3	0	1	0	-1	-1	

Beschouw tak 1. Deze bevindt zich tussen de knooppunten 1 en 2, zie kolom 1 van A_a .

We vinden $u_1 = v_1 - v_2$

$$u_2 = -v_2 + v_3$$

enz.

$$\text{Dus } U = A'_a V_k$$

V_k is een kolomvector van de potentialen van alle knooppunten.

Uit bovenstaande formule volgt

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ A'_{12} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ v_r \end{bmatrix}$$

V is een kolomvector van de potentialen van alle knooppunten op één na.

U_1 is een kolomvector van de boontakspanningen.

U_2 is een kolomvector van de koordespanningen.

v_r is de potentiaal van het referentieknooppunt r .

In bovenstaande betrekking worden de takspanningen uitgedrukt in k andere variabelen. We weten, dat slechts $k - 1$ van de spanningsvariabelen onafhankelijk zijn.

Stellen wij v_r gelijk aan nul, dan blijven er $k - 1$ potentialen over, die we kunnen gebruiken als onafhankelijke variabelen om alle takspanningen te berekenen. Dat deze knooppuntspotentialen inderdaad een compleet stelsel onafhankelijke variabelen vormen, volgt uit de volgende berekening.

Het nulstellen van v_r betekent het schrappen van de laatste kolom van

A'_a , immers

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ A'_{12} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$$

zodat

$$V = A'_{11}{}^{-1} U_1,$$

dus

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} \\ A'_{12} \end{bmatrix} V$$

dus

$$U = A'V$$

De potentialen zijn onafhankelijk; anders zou er een niet nul zijnde matrix D bestaan, zodanig dat $D A'_{11}{}^{-1} = 0$ en dat is alleen mogelijk als $D = 0$.

We veronderstellen nu een netwerk, waarbij elke spanningsbron in serie met een niet-nul zijnde impedantie is geschakeld (fig.36). Tevens beschouwen wij iedere impedantie in serie te zijn geschakeld met een spanningsbron, waarvan de sterkte nul kan zijn.

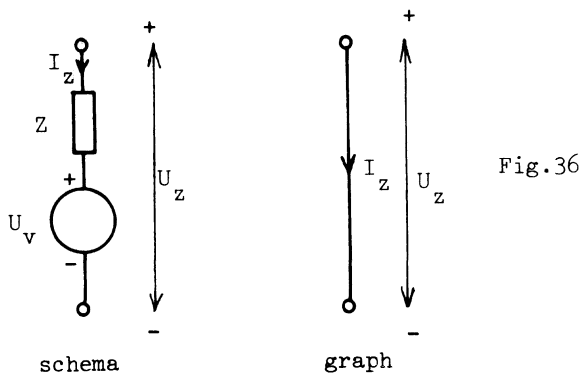


Fig.36

We stellen de A -matrix (de gereduceerde dus) zo op, dat de eerste z kolommen betrekking hebben op de z impedantietakken (met eventueel spanningsbronnen) en de volgende c kolommen op alle stroombronnen

$$A = \begin{bmatrix} A_z & A_c \end{bmatrix}.$$

Het begrip "boom" wordt hier niet gehanteerd.

We lezen af:

$$\begin{aligned} U_z &= Z I_z + U_v \\ I_z &= Y U_z - Y U_v \\ \begin{bmatrix} A_z & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_z \\ I_c \end{bmatrix} &= 0 \\ U &= A \cdot V. \end{aligned}$$

Dus
$$\begin{bmatrix} U_z \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_z \\ A'_c \end{bmatrix} V.$$

Dus
$$\begin{aligned} -A_c I_c &= A_z I_z = A_z Y U_z - A_z Y U_v = \\ &= A_z Y A'_z V - A_z Y U_v. \end{aligned}$$

Dus $V = (A_z Y A'_z)^{-1} \{ A_z Y U_v - A_c I_c \}$, mits de te inverteren matrix niet singulier is.

De orde van de te inverteren matrix is $k - 1$.

Voorbeeld: zie fig.37.

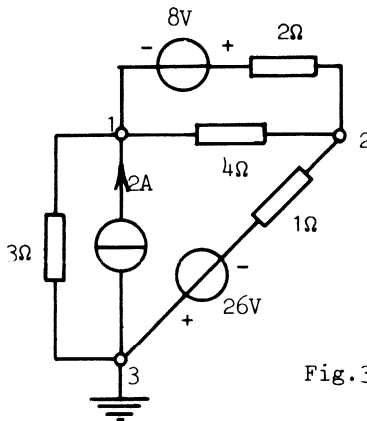
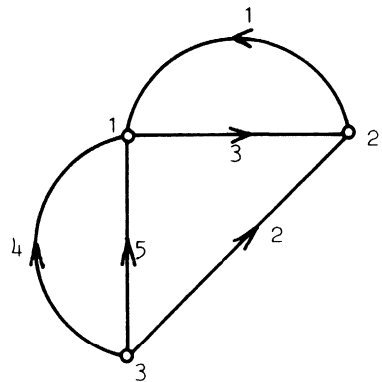


Fig.37



$$A = \begin{array}{c|cccc|c} & \xrightarrow{z} & & & \xleftarrow{c} & \\ k \backslash t & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$A_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \text{diag} \left(\frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \right)$$

$$U_v = \begin{bmatrix} 8 \\ 26 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_c = 2.$$

Na substitutie in de formule volgt na enig rekenwerk:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -19 \end{bmatrix} \text{ volt.}$$

Opgave: Bewijs, dat de matrix $A_z \Upsilon A'_z$ niet-singulier is m.b.v. de methoden van § II.6.

Opmerkingen: In feite wordt iedere impedantietak vervangen door het equivalente nortonschema. Men krijgt dan een kolomvector van stroombronnen:

$$\begin{bmatrix} I_c \\ -\Upsilon U_v \end{bmatrix}$$

De matrix $A_z \Upsilon A'_z$ is niets anders dan de uit E.N.I. § I.13 bekende knooppunts-admittantiematrix.

De methode, zoals hier gegeven, is niet toe te passen als het netwerk spanningsbronnen bevat, die niet in serie met een impedantie zijn. In zo'n geval echter is het bijna altijd mogelijk het netwerk zo te vervangen dat alle spanningsbronnen wel in serie met een impedantie zijn (zie fig. 38).

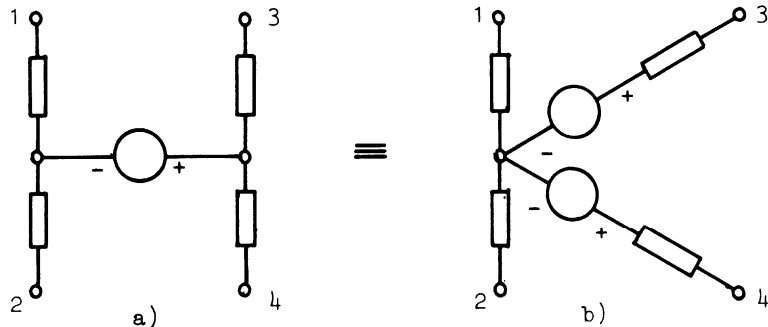


Fig.38

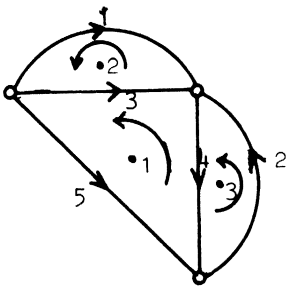
Als de impedantietakstromen van fig.38a gelijk zijn aan de corresponderende impedantietakstromen van fig.38b, zijn de spanningen tussen de knooppunten van fig.38a gelijk aan de corresponderende spanningen van fig.38b.

Deze transformatie kan wel nuttig bij handberekeningen zijn, bij systematische berekening van netwerken van grote omvang echter verdient de Q- of B-methode de voorkeur.

II.8. De oplossing van een netwerkprobleem met de C-matrix (maasmethode)

Deze geldt alleen voor planaire netwerken.

Beschouw fig.39.



$$C = \begin{array}{c|ccccc} & \begin{array}{c} t \\ v \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

In de graph zijn de positieve omlooprichtingen van de mazen aangegeven.

Uit fig.39 lezen we af

$$i_1 = -j_2$$

$$i_2 = j_3$$

$$i_3 = -j_1 + j_2$$

waarin j een maasstroom voorstelt.

In matrixvorm:

$$I = C'J.$$

Door precies analoge beschouwingen als die bij de knooppuntsmethode kunnen we afleiden dat de maasstromen een volledig en onafhankelijk stelsel van variabelen vormt.

We beschouwen nu een netwerk, waarin elke stroombron parallel aan een admittantie is, zie fig.40.

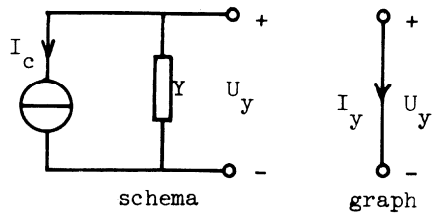


Fig.40

We stellen de C -matrix zo op, dat de eerste v kolommen betrekking hebben op de v spanningsbronnen:

$$C = \begin{bmatrix} C_v & C_y \end{bmatrix}.$$

We lezen af:

$$I_y = Y U_y + I_c$$

dus

$$U_y = Z I_y - Z I_c$$

$$\begin{bmatrix} C_v & C_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_v \\ U_y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} I_v \\ I_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_v \\ C'_y \end{bmatrix} J$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } -C_v U_v &= C_y U_y = C_y Z I_y - C_y Z I_c \\ &= C_y Z C'_y J - C_y Z I_c \end{aligned}$$

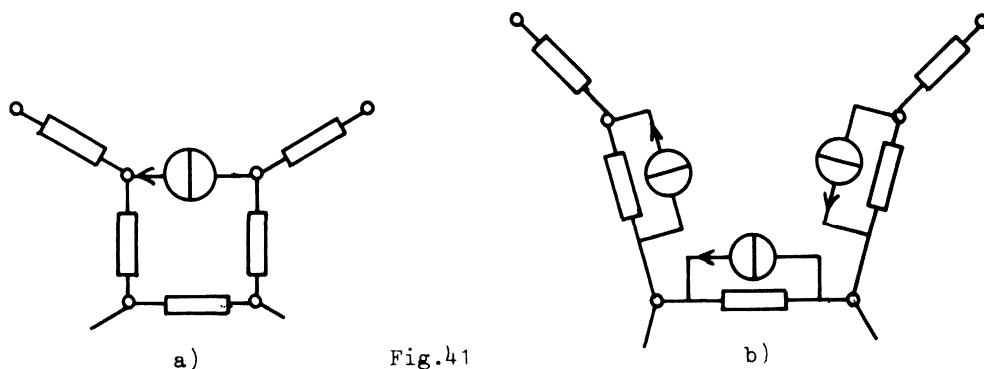
$$\text{dus } J = (C_y Z C'_y)^{-1} \{ -C_v U_v + C_y Z I_c \}$$

MITS DE TE INVERTEREN MATRIX NIET-SINGULIER IS.

De orde van de te inverteren matrix is μ .

Merk op de dualiteit met de knooppuntsmethode!

De opgave en opmerkingen aan het einde van § II.7 zijn mutatis mutandis ook van toepassing op deze methode. Een tak, die uit een enkele stroombron bestaat, kan volgens fig.41a worden getransformeerd in stroombronnen parallel aan admittanties.

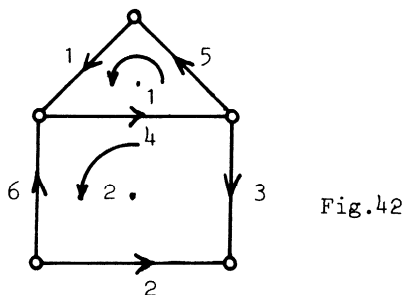


Voor deze figuren geldt dat bij gelijkheid van corresponderende takspanningen, ook gelijkheid van corresponderende verschillen van maaströmen geldt.

Voorbeeld:

We kiezen hetzelfde netwerk van fig.37.

De graph wordt getekend zoals in fig.42.



$$C = \begin{array}{c|cccccc} & \begin{array}{cc} \leftarrow v & \rightarrow y \end{array} & & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \text{diag} (1 \quad 4 \quad 2 \quad 3)$$

$$U_v = \begin{bmatrix} 8 \\ 26 \end{bmatrix} \quad I_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Substitutie levert op

$$J = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Vraag: Laat zien, dat hieruit dezelfde knooppuntspotentialen volgen als gevonden bij de knooppuntsmethode.

II.9. Nabeschouwing

In de paragrafen 3, 4, 7 en 8 hebben we verschillende methoden behandeld om een netwerkprobleem op te lossen.

De maasmethode (C-matrix) is beperkt tot planaire netwerken, terwijl verder de A-methode en de C-methode alleen gebruikt kunnen worden voor speciale netwerken (iedere stroombron heeft een paralleladmittantie resp. iedere spanningsbron heeft een serie-impedantie). De in § 7, 8 genoemde hulpmiddelen, die nodig zijn om deze methoden algemeen bruikbaar te maken, kunnen wel in bepaalde gevallen nuttig zijn, maar lenen zich niet zo gemakkelijk voor een systematische berekening van netwerken van grote omvang.

De B- en de Q-methode zijn het meest algemeen. De B-matrix is het gemakkelijkst op te stellen. Wil men de Q-methode gebruiken, dan is de Q-matrix gemakkelijk te vinden uit de B-matrix.

In netwerken van kleine omvang is het bijna altijd mogelijk, door handige algebraïsche omvormingen, het probleem snel op te lossen. Echter bij netwerken van grote omvang, waarbij ook de computer gebruikt moet worden, moet wel degelijk rekening gehouden worden met de formele theorie. Bovendien zijn de β - en \mathcal{Q} -methoden juist wegens hun systematiek en algemeenheid het meest geschikt om als basis te dienen voor de verdere theoretische ontwikkeling van het vak.

II.10. Het dualiteitsbeginsel.

Wij hebben in hoofdstuk I gesproken over duale graphen. Zowel in EN.I als in EN.II is er vaak gebruik gemaakt van analoge beschouwingen waarbij de rollen van stroom en spanning verwisseld worden. Ons doel in deze paragraaf is deze ideeën te formaliseren en bepaalde consequenties hieruit te trekken.

Voor een planair netwerk N_1 kunnen wij de volgende vergelijkingen opschrijven:

$$I = \begin{bmatrix} I_v \\ I_y \\ I_c \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_v \\ U_y \\ U_c \end{bmatrix}$$

$$I_y = Y_1 U_y, \quad C_a U = 0, \quad I = C'_a J,$$

waarin I , U , J de matrices van takstromen, spanningen en maasstromen zijn, en c , y , v de stroombron-, admittantie-, en spanningsbrontakken aanduiden.

De laatste twee vergelijkingen drukken de wetten van Kirchhoff uit.

Wij laten even buiten beschouwing welke variabelen als onafhankelijke onbekenden moeten worden beschouwd om het probleem op te lossen.

Verwisselen wij I en U en vervangen wij J door V (knoospotentialen) dan resulteert:

$$U = \begin{bmatrix} U_v \\ U_y \\ U_c \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} I_v \\ I_y \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$U_y = Y_1 I_y, \quad C_a I = 0, \quad U = C'_a V.$$

In de eerste vergelijking echter kloppen de dimensies niet. Wij kunnen een geldige relatie krijgen door een (scalaire) constante in te voeren:

$$U_y = R^2 Y_1 I_y.$$

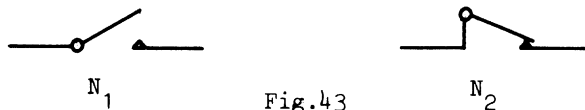
De twee laatste vergelijkingen moeten kennelijk de wetten van Kirchhoff in een netwerk N_2 uitdrukken. Dit is slechts dan mogelijk als de C_a -matrix van N_1 gelijk is aan de A_a -matrix van N_2 .

Dan moet ook gelden $R^2 Y_1 = Z_2$. De netwerken N_1 en N_2 heten duale netwerken.

Men lette goed op de voorwaarden waaraan voldaan moeten worden opdat

N_1 , N_2 dualen mogen heten:

1. De (gerichte) graph van N_1 is de duale graph van de (gerichte) graph van N_2 , d.w.z. $C_{a(1)} = A_{a(2)}$. (Uiteraard is dit slechts dan mogelijk als N_1 en N_2 planair zijn).
2. De richtingen van de takken in beide graphen stemmen overeen met de positieve stroomrichtingen en de richting van plus naar min bij de positieve spanningspolariteiten van de corresponderende takken in beide netwerken.
3. De impedantie van een impedantietak in N_1 is gelijk aan het product van R^2 en de admittantie van de corresponderende tak in N_2 . Zeer vaak heeft R de numerieke waarde 1.
4. Een spanningsbron(stroombron) in N_1 correspondeert met een stroombron (spanningsbron) in N_2 van gelijke sterkte.
5. Indien de netwerken ook schakelaars bevatten, dan correspondeert een geopend contact in N_1 met een gesloten contact in N_2 .



Het dualiteitsbeginsel behelst een stelsel regels, waarmee het mogelijk is van een gegeven netwerktheorema onmiddellijk een corresponderend theorema af te leiden dat geldig is voor het duale netwerk. Het dictaat

EN.I levert tientallen voorbeelden waarop het principe toegepast kan worden.

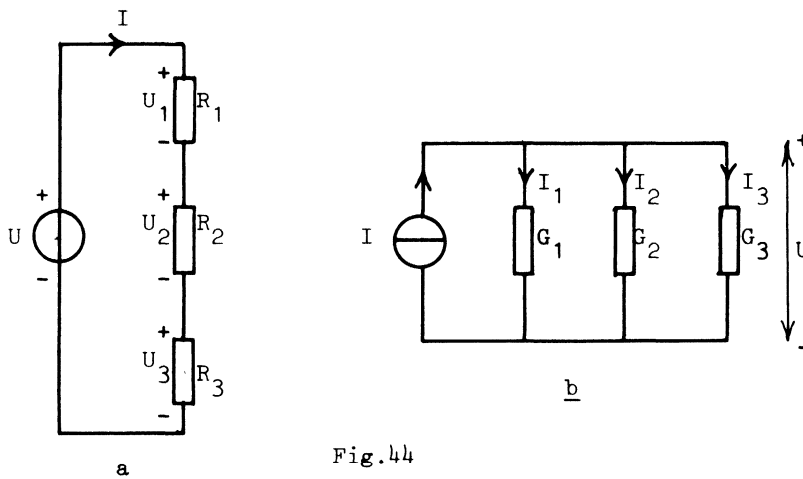


Fig.44

Bijvoorbeeld uit figuur 44a volgt de regel voor een serie-keten van weerstanden: een serie-keten van weerstanden is equivalent aan een enkele weerstand van waarde gelijk aan de som van de weerstanden in de keten. Figuur 44b toont het duale netwerk van fig.44a, waarin ook aan voorwaarden 3 en 4 voldaan wordt. Onmiddellijk volgt hieruit dat een parallel-keten van geleidingen equivalent is aan een enkele geleiding van waarde gelijk aan de som van de geleidingen in de keten. Een serie-keten van weerstanden en een bron is een speciale vorm van een lus; een parallelketen van geleidingen en een bron is een speciale vorm van een snede.

Mits men zich beperkt tot planaire netwerken, hoeft men in principe slechts de helft van alle mogelijke theorema's of formules te beschouwen. De rest volgt dan uit het dualiteitsprincipe. Omgekeerd, wanneer men een nieuw resultaat geformuleerd heeft, is het zinvol het duale resultaat ook te formuleren. Soms is het ene resultaat vanzelfsprekend of welbekend, terwijl het andere op het eerste gezicht moeilijk lijkt. Een schijnbaar moeilijk vraagstuk kan dus vaak worden omgezet in een gemakkelijk op te lossen probleem. Een treffend voorbeeld is de discussie over de onafhankelijkheid van knooppuntspotentialen en maasstromen in

II.9. Het is intuïtief vrij gemakkelijk in te zien hoe men knooppuntspotentialen in boomtakenspanningen moet uitdrukken. Dit is lang niet het geval bij het uitdrukken van de maasstromen in de koordestromen. Het dualiteitsprincipe kunnen wij als een tweetalig woordenboek opvatten waarmee wij een gegeven bewering kunnen vertalen in de duale bewering.

"Woordenboek"

tak	tak
incident	incident
knooppunt	venster
maas	knooppunts-snede
boom	co-boom
lus	snede
boomtak	koorde
serie	parallel
knooppuntspotentiaal	maasstroom
matrix A	matrix C
matrix B	matrix Q
(lussen gebaseerd op een co-boom)	(seden gebaseerd op een boom)
spanning	stroom
impedantie	admittantie
weerstand	geleiding
capaciteit	zelf-inductie
condensator	spoel
spanningsbron	stroombron
lading	(totaal omvatte) flux
kortgesloten tak	open tak
magnetische energie	elektrische energie
vermogen	vermogen
gesloten schakelaar	open schakelaar.

Wij hebben deze lijst kunnen opstellen als gevolg van de vier voorwaarden welke volgen uit de eis, dat wanneer spanning en stroom in een stelsel vergelijkingen - dat een complete en geldige beschrijving van het

gedrag van een netwerk weergeeft - worden verwisseld, er een stelsel vergelijkingen verkregen wordt dat ook een complete en geldige beschrijving van een netwerk is.

Ook wanneer de beschrijvende vergelijkingen andere variabelen dan de knooppuntspotentialen en de maasstromen bezigen, mogen wij de vergelijkingen direct in de duale vorm vertalen. Immers is de relatie tussen bijvoorbeeld de knooppuntsvergelijkingen en de gegeven vergelijkingen isomorf aan de relatie tussen de maasvergelijkingen en de duale vorm van de gegeven vergelijkingen. De graph wordt weergegeven door de \bar{A} of de \bar{C} -matrix en bij elke relatie tussen de vergelijkingen - met welke variabelen ook - moet een van deze matrices betrokken worden.

Het dualiteitsbeginsel geldt ook voor niet-lineaire of tijdsafhankelijke netwerken. Wij moeten echter dan ons "woordenboek" opstellen aan de hand van (a) de verwisseling van stroom en spanning en (b) de dualiteit van de graphen.

Tenslotte kunnen, zoals op blz. 11 en 12 is vermeld, elektrisch volledige equivalente netwerken verschillende graphen hebben. Dergelijke graphen zijn voorbeelden van isomorfe graphen.

Het kan dan gebeuren dat twee netwerken elektrisch dual zijn maar dat de graph van het ene netwerk de duale graph van een van de isomorfen van de graph van het andere netwerk is. Als men van tevoren bedacht is op dit verschijnsel, behoeft dit geen aanleiding tot moeilijkheden te geven.

Voorbeelden zijn in fig.45 afgebeeld.

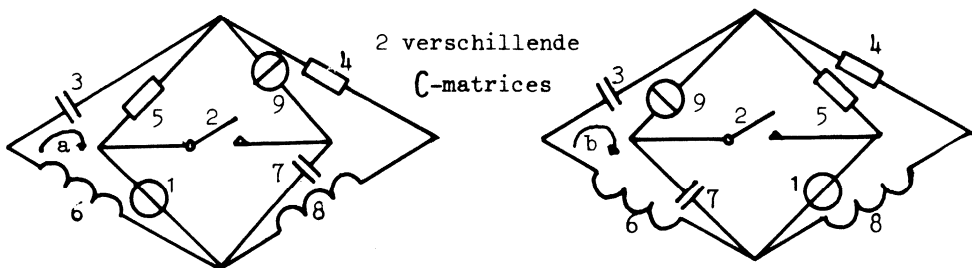
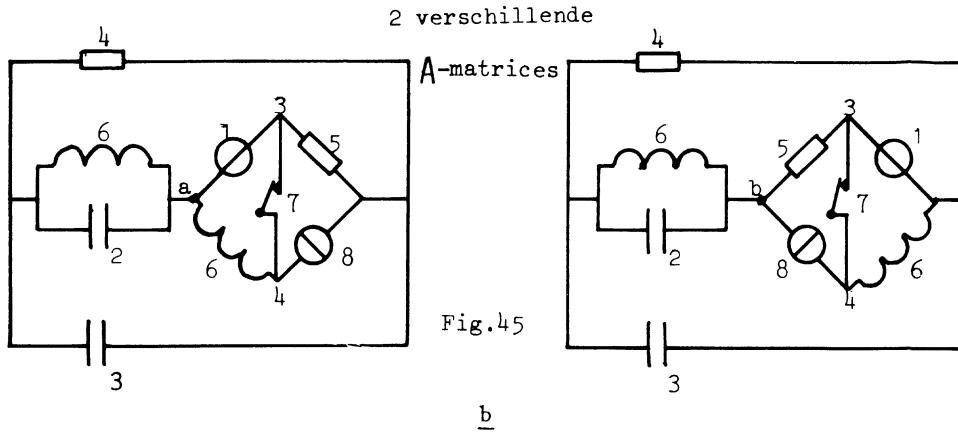


Fig.45 a

De vergelijkingen voor de mazen a en b zijn niet dezelfde.



De vergelijkingen voor de knooppunten a en b zijn niet dezelfde.

III. TRANSFORMATOR-NETWERKEN.

III.1 Inleiding

De tot dusver behandelde theorie faalt, als verschillende netwerkdelen alleen magnetisch met elkaar gekoppeld zijn. (fig. 46)

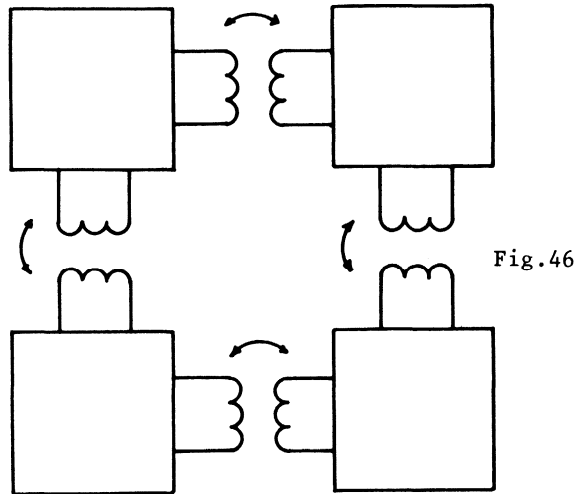


Fig.46

We kunnen twee gekoppelde spoelen vervangendoor een ideale transformator en twee zelfinducties. (fig. 47)

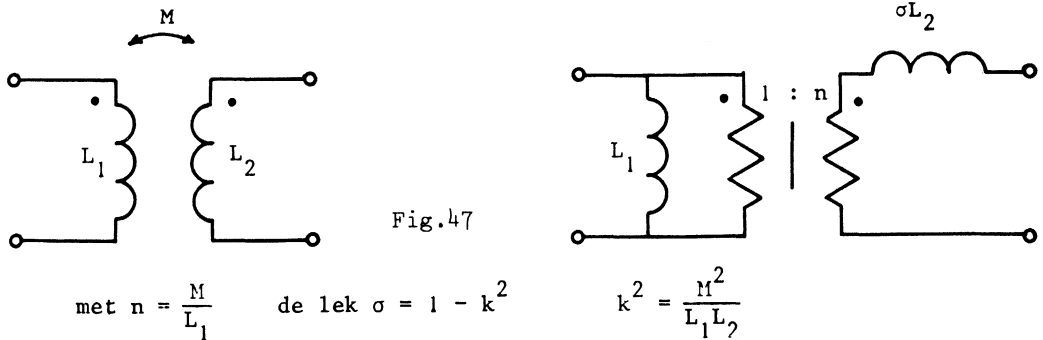


Fig.47

met $n = \frac{M}{L_1}$ de lek $\sigma = 1 - k^2$

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2}$$

Ook andere equivalenten met transformatoren zijn te gebruiken. Op deze wijze ontstaat een netwerk, waarin naast bronnen, weerstanden, spoelen en condensatoren ook (ideale) transformatoren voorkomen.

Een studie van netwerken met transformatoren is daarom noodzakelijk.

III.2. We beschouwen eerst een netwerk zonder transformatoren.

Zo'n netwerk met n elementen (bronnen, weerstanden, spoelen en condensatoren) is op te vatten als een n-poort-netwerk, waarop de verschillende elementen zijn aangesloten (fig.48).

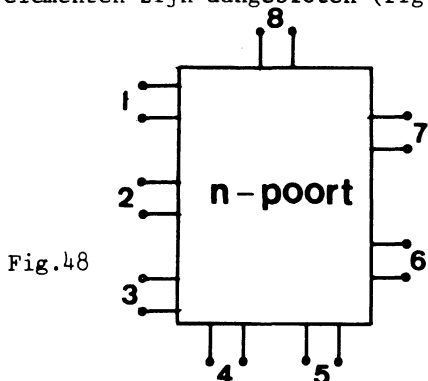


Fig.48

Het inwendige van dit n-poortnetwerk bestaat uit galvanische verbindingen tussen de klemmen van de poorten.

Voor alle klemstromen geldt de relatie $\underline{A} \underline{i}_k = 0$, (1)

waarin \underline{A} de incidentiematrix van het n-poortnetwerk is en \underline{i}_k de klemstromen. Maar voor iedere poort geldt dat de toevloeiende stroom door de ene klem gelijk is aan de afvloeiende stroom door de andere klem. Deze voorwaarde noemen wij de poortvoorwaarde. De voorwaarde ontstaat door de omstandigheid dat iedere poort uiteindelijk door een enkel eenpoort-element wordt afgesloten. Gebruiken wij deze voorwaarde om de helft van de klemstromen uit (1) te elimineren, dan resulteert een matrixvergelijking van de vorm

$$\underline{M} \underline{i} = 0, \tag{2}$$

waarin \underline{i} een kolomvector van de poortstromen is. Met poortstromen bedoelen wij een van de klemstromen van de poort. Op een eventueel minteken na zijn deze poortstromen niets anders dan de takstromen die door de elementen van het oorspronkelijke netwerk vloeien.

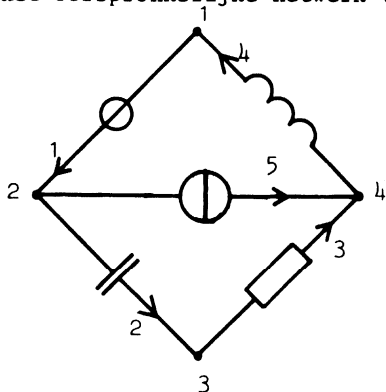
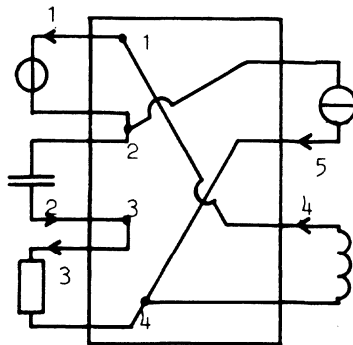


Fig.49



Nemen wij aan, zoals in hoofdstuk II, dat alle stromen en spanningen exponentiële functies van de tijd zijn met dezelfde exponent, dan volgt

$$MI = 0.$$

De knooppunten geven de volgende relaties:

$$\begin{aligned} I_1 - I_4 &= 0 \\ -I_1 + I_2 + I_5 &= 0 \\ -I_2 + I_3 &= 0 \\ -I_3 + I_4 - I_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Dus} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow MI = 0.$$

Door elementaire rij-operaties brengen we de eenheidsmatrix in hoofdpositie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow NI = 0.$$

Blijkbaar was in de matrix M één rij afhankelijk van de andere.

Het symbool N wordt hier gebruikt om aan te duiden een coëfficiëntmatrix van de poortstromen, van orde $r \times t$ en met de eenheidsmatrix I_r in de hoofdpositie. Deze matrix is in het hier beschouwde geval van transformatorloze netwerken dezelfde als de Q -matrix van het oorspronkelijke netwerk, t.o.v. een geschikt gekozen boom.

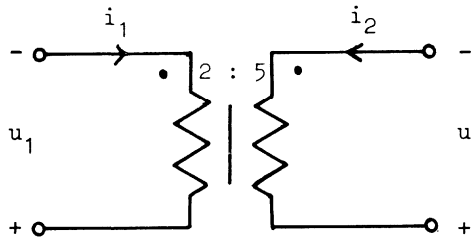
Soms is het niet mogelijk de eenheidsmatrix vooraan te krijgen. Dan moet men de poortnummering wijzigen.

Het kiezen van een boom met $k-1$ takken die corresponderen met de eerste $k-1$ kolommen van M geeft de garantie, dat de eenheidsmatrix voorop te krijgen is.

Voor netwerken met transformatoren echter biedt de graphtheorie geen wezenlijke hulp. Wij moeten dan het probleem zuiver algebraïsch aanpakken.

III.3. De enkele transformator (fig. 50)

Men beschouwe eerst het voorbeeld van fig. 50.



We kiezen de positieve spanningspolariteit zo, dat de positieve stroomrichting in het aangesloten element van + naar - is.

fig.50

Er geldt $2i_1 + 5i_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \mathbf{MI} = 0.$$

Rijoperaties

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \mathbf{NI} = 0.$$

verder geldt $\frac{u_1}{2} = \frac{u_2}{5} \rightarrow 5u_1 - 2u_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0, \quad \mathbf{KU} = 0.$$

Met de eenheids-matrix achteraan $\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0, \quad \mathbf{PU} = 0.$

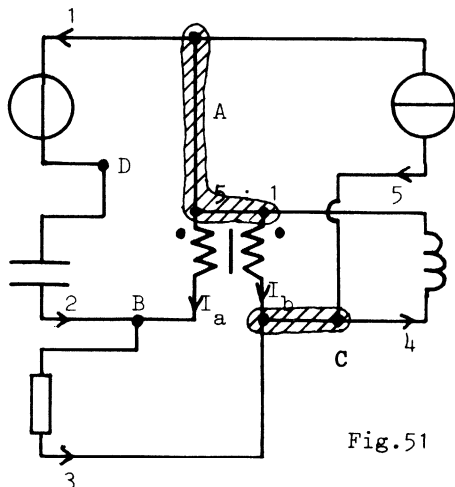
Hierin is \mathbf{K} een willekeurige coëfficiëntmatrix van de poortspanningen van de transformator, terwijl \mathbf{P} een coëfficiëntmatrix van de poortspanningen van orde $r \times t$ met de eenheidsmatrix $\mathbf{1}_s$ in de laatste s kolommen.

$$\begin{aligned} \text{Dus } \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ook hier geldt (evenals bij \mathbf{Q} en \mathbf{B}):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= -\mathbf{N}'_2 \\ \text{of } -\mathbf{P}'_1 &= \mathbf{N}_2 \quad (\text{zie Par. III.5}) \end{aligned}$$

III.4. Een 5-poortnetwerk met één transformator. (fig. 51)



De stroomvergelijkingen zijn:

knooppunt A $I_4 = I_a + I_b + I_1 + I_5$
 " B $I_3 = I_a + I_2$
 " C $I_4 = I_3 + I_b + I_5$
 " D $I_1 = I_2$

en voor de transformator:

$$5I_a + I_b = 0$$

Fig.51

In het voorbeeld van fig. 51 worden dus de situaties van Par.III.2 en Par. III.3 gecombineerd.

In matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_a & I_b \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_a \\ I_b \end{bmatrix} = 0 \rightarrow MI = 0$$

7 stromen

De bovenste 4 rijen bevatten alleen +1, -1 of 0.

De onderste rij bevat ook andere cijfers. (hier 5)

Na eliminatie van I_a en I_b , het schrappen van rijen die afhankelijk van de rest zijn en na het vooropzetten van de eenheidsmatrix ontstaat:

$$NI = 0 \text{ met } N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Het optreden van twee gelijke rijen in N_2 is zuiver toeval.

Als een andere transformatieverhouding wordt gekozen, gebeurt dit niet.

Het eliminatieproces zelf geschiedt het gemakkelijkst volgens de klassieke procedure van Gauss.

Eliminatieprocedure van Gauss:

	1	2	3	4	5	$\left. \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\} \rightarrow$		
	1			-1	1	1	(rij 1 - rij 3 vervangt rij 1)	
		1	-1			1		
			1	-1	1			
	1	-1				5	(rij 5 - rij 3) vervangt rij 5)	
						1		
	1		-1			1	rij 1 - rij 2 vervangt rij 1.	
		1	-1			1		
5 x rij 2 - rij 5 vervangt rij 5.								
			-1	-1	-1	1	→ schrappen volgens Gauss	
	1	-1						
			-1	1	-1	5		
2 gelijke rijen	1	-1		
		1	-1			1	→ schrappen volgens Gauss	
	1	-1	→ schrappen wegens gelijkheid met rij 1.	
		-5	4	1	-1			
rij 1 + rij 2 vervangt rij 1	$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -1 & \end{array} \right]$							$-\frac{1}{5} \times$ rij 2 vervangt rij 2
	$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \end{array} \right]$							

III.5. Het verband tussen N en P.

Wij onderzoeken nu een nog algemener geval, waarbij het n-poortnetwerk uit ideale transformatoren en galvanische verbindingen bestaat. Voor ieder knooppunt en iedere transformator stellen wij de stroomvergelijking op. Na eliminatie van alle stroomvariabelen behalve de poortstromen, resulteert

$$MI = 0. \quad (1)$$

Na het beurtelings schrappen van iedere rij, die lineair afhankelijk van de overige is, resulteert een matrix van orde $r \times t$ en rang r . Hierin bestaat dus een niet-singuliere submatrix van orde r , d.w.z. r kolommen, die onderling lineair onafhankelijk zijn. Door rij- en kolomoperaties op deze submatrix uit te voeren, is het mogelijk de eenheidsmatrix van orde r in hoofdpositie te krijgen:

$$NI = 0, \quad (2)$$

met

$$N = \begin{bmatrix} 1 & N_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

dus

$$I_1 = -N_2 I_2. \quad (4)$$

Op analoge manier resulteert door toepassing van de spanningswet van Kirchhoff op alle mogelijke lussen in het netwerk en door opschrijven van de spanningsrelaties van alle transformatoren en na eliminatie van alle spanningen, behalve de poortspanningen:

$$KU = 0. \quad (5)$$

Het n-poortnetwerk is echter niet-energetisch. In de galvanische verbindingen en in de ideale transformatoren is er geen manier om energie te dissiperen of op te slaan. Derhalve is $\sum ui = 0$ voor alle t , waarin de sommatie over alle poorten dient te geschieden en waarbij de positieve polariteit en positieve stroomrichting van iedere poort zodanig zijn gekozen, dat in het aangesloten tweeklemmennetwerk de stroom positief wordt gerekend wanneer deze van plus naar min vloeit (zie fig.52).

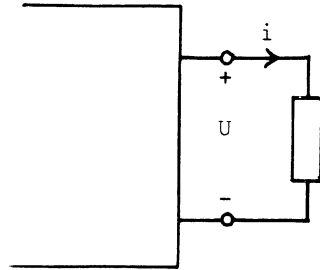


Fig.52

Derhalve is $UI = 0$, d.w.z.

$$U'I = 0. \quad (6)$$

Uit (1) en (6) volgt, dat bij vaste I de rijen van M tot de vectorruimte behoren, die door alle mogelijke vectoren U' wordt opgespannen.

Uit (5) en (6) volgt, dat bij vaste U de rijen van K tot de vectorruimte behoren, die door alle mogelijke vectoren I' wordt opgespannen.

Daar volgens (6) deze vectorruimten orthogonaal zijn, geldt:

$$KM' = 0 \quad (7)$$

en

$$KN' = 0. \quad (8)$$

Als M de rang r heeft, is de rang van K ten hoogste $n - r$, waarin n het aantal poorten is.

Uit (6) volgt nu

$$U'_1 I_1 + U'_2 I_2 = 0 \quad (9)$$

en met (4)

$$(-U'_1 N_2 + U'_2) I_2 = 0.$$

Dit geldt voor alle I_2 , dus

$$U_2 = N'_2 U_1 \quad (10)$$

of

$$\begin{bmatrix} -N'_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (11)$$

De matrix $P = \begin{bmatrix} -N'_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 1 \end{bmatrix}$ heeft de rang $n - r$, daar U_2 uit $n - r$ elementen bestaat, zodat N_2 $n-r$ kolommen heeft. Derhalve bevat (11) alle informatie, die uit (5) kan worden geput.

$$\text{Dus} \quad N'_2 = -P_1. \quad (12)$$

Wij vinden, net als bij de beschouwingen, die uit de graphtheorie volgen, dat de stromen door en de spanningen over de weerstanden, spoelen, condensatoren en bronnen in twee groepen kunnen worden verdeeld, aangeduid met de indices 1 en 2, en wel zodanig dat

$$I_1 = -N_2 I_2 = P'_1 I_2 \quad (13)$$

$$U_2 = N'_2 U_1 = -P_1 U_1. \quad (14)$$

Het enige verschil met de resultaten van hoofdstuk II is, dat de matrices N en P niet uit eenvoudige graphtheoretische beschouwingen kunnen worden bepaald. Om N te noteren moeten wij alle stroomvergelijkingen opschrijven en een (algebraïsch) eliminatieproces toepassen, willen wij in het algemene geval systematisch te werk gaan.

In de praktijk is het meestal gemakkelijk en met een kleinere kans op numerieke fouten, uit te gaan van de stroomvergelijkingen; er zijn echter speciale configuraties, waarbij de spanningsvergelijkingen meer voor de hand liggen.

III.6. Het oplossen van een netwerkprobleem met transformatoren.

We schrijven voor elk knooppunt en elke transformator de stroomvergelijking op.

Hieruit elimineren we de inwendige stromen.

We houden over:

$$MI = 0.$$

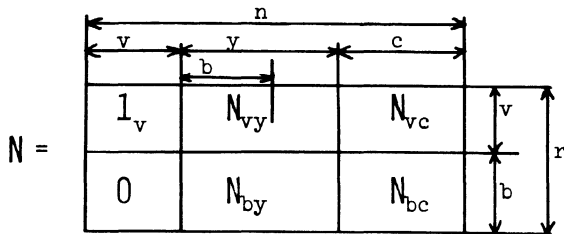
I is de kolommatrix van de poortstromen. Door kolomverwisseling zorgen wij dat de eerste v kolommen met spanningsbronpoorten en de laatste c kolommen met stroombronpoorten overeenkomen.

Door elementaire rij-operaties brengen we de eenheidsmatrix vooraan:

$$NI = 0 \quad \text{met} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & N_2 \end{bmatrix}.$$

Opmerking: Soms moeten twee of meer kolommen behorende bij de impedantie-takken worden verwisseld om de eenheidsmatrix vooraan te kunnen krijgen.

We verdelen de N -matrix als volgt:



n is het aantal poorten (vergelijk takken)

r is de rang (vergelijk $k - 1$).

In de formules: $I_1 = -N_2 I_2$

en
$$U_2 = -P_1 U_1$$

heeft de index 1 betrekking op de {
 onafhankelijke spanningen
 afhankelijke stromen
 onafhankelijke stromen
 heeft de index 2 betrekking op de {
 onafhankelijke spanningen.

Als het niet mogelijk is de matrix in deze vorm te brengen, dan heeft het netwerkprobleem geen oplossing. Of de transformator verhoudingen zijn verkeerd gekozen of de bronnen zijn aan de verkeerde poorten verbonden. Altijd moet het mogelijk zijn dat de onafhankelijke stroombronnen tot de poorten van onafhankelijke stromen behoren, terwijl tegelijkertijd de onafhankelijke spanningen tot de onafhankelijke spanningspoorten behoren.

De vergelijkingen $U_2 = -P_1 U_1 = N'_2 U_1$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ N'_2 \end{bmatrix} U_1 = N' U_1$$

zijn isomorf aan die met de matrix Q . Zo vinden we het formuleblad (blz. 81).

III.7. De keuze tussen de N - en de P -methode.

Bij de P -methode is de te inverteren matrix van de orde l

Bij de N -methode is de te inverteren matrix van de orde b .

Dus als $l < b$ kiezen we de P-methode
 of als $n - r - c < r - v$ kiezen we de P-methode.
 Anders kiezen wij de N-methode.

Als voorbeeld beschouwen wij het netwerk van fig.51 met de volgende
 elementen waarden.

$$U_1 = 1 \text{ V} \quad I_5 = 1 \text{ A} \quad R_3 = 1 \Omega \quad C_2 = 1 \text{ F} \quad L_4 = 1 \text{ H}$$

verder zij $\omega = 1 \text{ rad/s}$.

$$\text{We vonden } N = \begin{bmatrix} 1 & \overleftarrow{b} & 0 \\ -1 & - & - \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Dus

$$N_{by} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$Y = \text{diag} \begin{bmatrix} j & 1 & -j \end{bmatrix} x$$

$$\begin{bmatrix} j & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5}j \\ 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} x +$$

$$N_{by} Y N'_{by} = j + \frac{16}{25} - \frac{1}{25} j = \frac{8}{25} (2 + 3j).$$

De inverse hiervan is $\frac{25}{8} \frac{1}{2+3j}$.

$$N'_{bc} I_c = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$$

$$N_{by} Y = j \quad -\frac{4}{5} \quad \frac{1}{5} j$$

$$N_{vy} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} x +$$

$$N_{by} Y N'_{vy} = \frac{16}{25} - \frac{1}{25} j$$

$$U_b = U_2 = \frac{-25}{8} \frac{1}{2+3j} \left(\frac{1}{5} + \frac{16}{25} - \frac{1}{25} j \right) = -\frac{1}{8} (3 - 5j).$$

III.8. Meervoudig gewikkelde transformatoren.

Tenslotte bespreken we een methode om met bijzondere schakelingen met transformatoren een gewenste M of K -matrix direct te realiseren.

Beschouw fig.53.

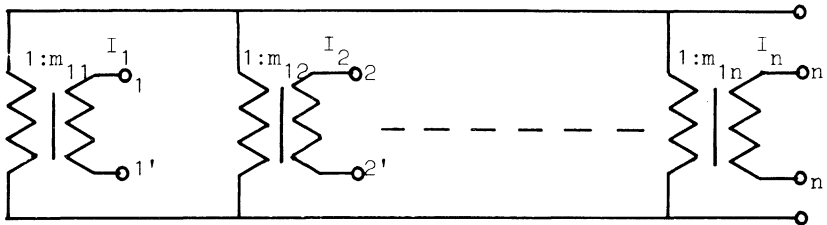


Fig.53

De primaire wikkelingen zijn parallelgeschakeld en deze poort wordt open-gelaten.

De stromen in de primaire wikkelingen zijn samen nul, dus

$$m_{11} I_1 + m_{12} I_2 + \dots + m_{1n} I_n = 0.$$

Schakelen we twee van dergelijke bouwstenen in serie, dan krijgen we met weglating van de primaire wikkelingen (fig.54)

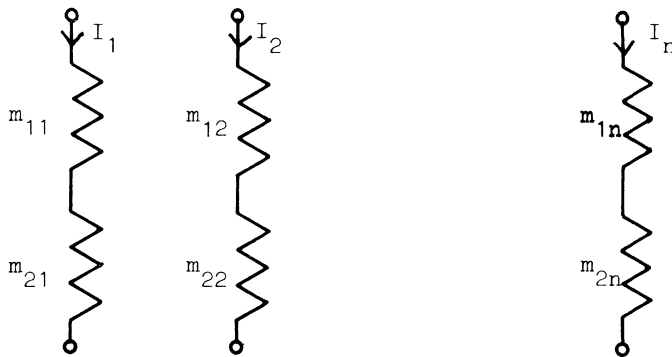


Fig.54

Naast bovenstaande betrekking volgt dan nog

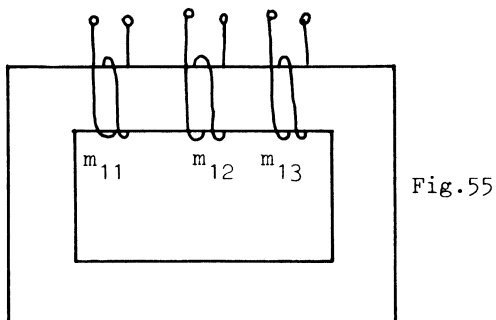
$$m_{21} I_1 + m_{22} I_2 + \dots + m_{2n} I_n = 0.$$

Zodoende ontstaat $M \mathbf{I} = \mathbf{0}$ waarbij de elementen van M de windingsgetallen van de secundaire windingen zijn.

Opmerking: We kunnen de secundaire wikkelingen op één kern aanbrengen en de primaire wikkelingen weglaten.

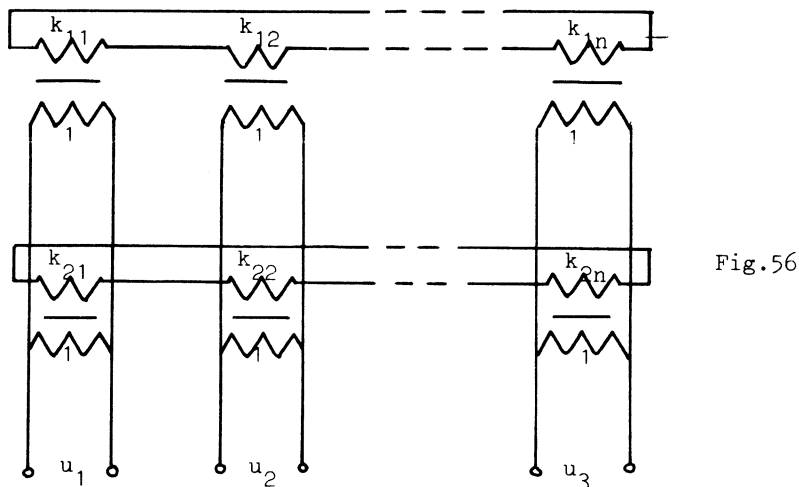
Dan ontstaat de zogenaamde meervoudig gewikkelde transformator (fig.55).

Daar wij steeds met ideale transformatoren te maken hebben, moet het kernmateriaal een oneindige permeabiliteit hebben (vgl.EN.I. hfdst.7).



Bij een oneindige permeabiliteit is het H-veld in de materie van de kern nul. Dus is het totaal aantal ampère-windingen op de kern nul. Dit is de voorwaarde die de transformatorstroomvergelijking uitdrukt.

De duale schakeling is getekend in fig.56.

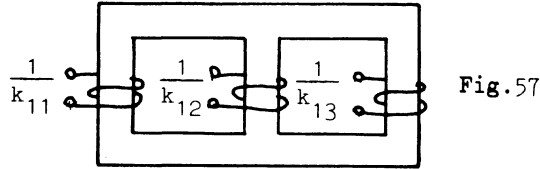


We lezen af: $k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + \dots + k_{1n}u_n = 0$
 $k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + \dots + k_{2n}u_n = 0 .$

Algemeen geldt: $KU = 0.$

De elementen van K zijn de windingsgetallen van de primaire windingen.

Ook deze schakeling heeft een meervoudig-gewikkeld equivalent, zie fig.57.



De spanningsvergelijking drukt uit de voorwaarde dat de lekflux (buiten de kern) nul is.

Het is interessant op te merken dat de magnetische structuren (de kernen) van fig. 55 en 57 in wezen topologische dualen zijn en dat die corresponderen met de elektrische structuren van fig. 56 en 53 resp. Deze overeenkomst is niet toevallig; zij heeft te maken met de topologische dualiteit tussen elektrische en magnetische velden in de theorie van het elektromagnetisch veld. Vooral bij elektrische machines kunnen dergelijke beschouwingen hun nut hebben.

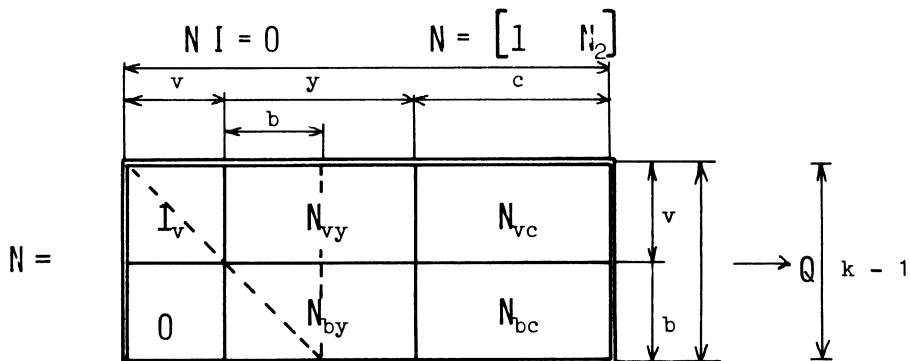
De meest algemene configuratie, die wij tot nu toe beschouwd hebben, bestaat uit bronnen, capaciteiten, weerstanden, spoelen en meervoudig gewikkelde transformatoren. De methode van berekening blijft dezelfde als bij de voorgaande beschouwingen. Eerst wordt een n-poort (niet-energetisch netwerk) gevormd door alle bronnen, weerstanden, condensatoren en spoelen te verwijderen. Voor dit n-poortnetwerk worden alle stroomvergelijkingen opgeschreven, zowel voor de transformatoren als voor de knooppunten. Vervolgens worden alle stromen behalve poortstromen geëlimineerd. Er resulteert voor de poortstromen de matrixvergelijking

$$MI = 0.$$

Daar het netwerk niet-energetisch is, weten wij dat voor de spanningen geldt

$$KU = 0 \quad \text{waarbij } KM' = 0.$$

Vervolgens gelden alle verdere beschouwingen van § III.7., tot de eindvorm van de oplossing. Het enige wezenlijke verschil is dat de elementen van M willekeurig reële getallen kunnen zijn. Dit feit heeft echter geen consequenties voor de oplossingsmethode.

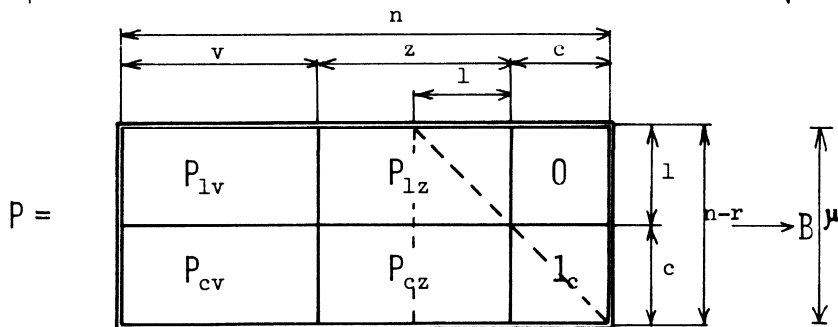
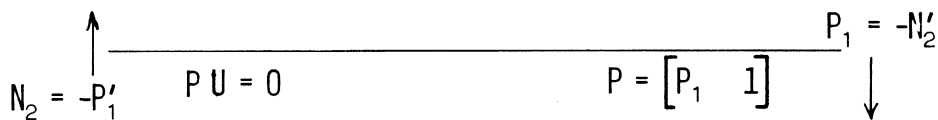


$$U_b = -(N_{by} Y N'_{by})^{-1} (N_{bc} I_c + N_{by} Y N'_{vy} U_v)$$

$$U_c = N'_{vc} U_v + N'_{bc} U_b$$

$$I_v = -N_{vy} Y (N'_{vy} U_v + N'_{by} U_b) - N_{vc} I_c$$

$$U_y = N'_{vy} U_v + N'_{by} U_b$$



$$I_1 = -(P_{lz} Z P'_{lz})^{-1} (P_{lv} U_v + P_{lz} Z P'_{cz} I_c)$$

$$I_v = P'_{cv} I_c + P'_{lv} I_1$$

$$U_c = -P_{cz} Z (P'_{cz} I_c + P'_{lz} I_1) - P_{cv} U_v$$

$$I_z = P'_{cz} I_c + P'_{lz} I_1$$

IV. DE KARAKTERISTIEKE VERGELIJKING

Bij vele netwerkvraagstukken komt het verschijnsel vrije trillingen aan de orde. In EN.I is reeds het een en ander hierover gezegd.

In dit hoofdstuk houden wij ons bezig met de algemene berekening van de karakteristieke vergelijking, welke de eigenfrequenties van het netwerk aangeeft. Deze berekening is niet alleen interessant op zichzelf, maar, zoals zal blijken in de volgende hoofdstukken, staat in nauw verband met de berekening van het gedrag van het netwerk als daarin geschakeld wordt.

Gegeven een netwerk met bronnen, spoelen, condensatoren, weerstanden en transformatoren. Als alle bronsterkten gelijk nul worden gesteld, resulteert een n-poort-transformatornetwerk, op de poorten waarvan de spoelen, condensatoren en weerstanden zijn aangesloten.

Van dit niet-energetische transformatornetwerk stellen we de M -matrix op. Hieruit vinden we de N -matrix en daaruit weer de P -matrix.

De poortvergelijkingen zijn

$N(-I) = 0$, zodat $N I = 0$, waarin I de kolomvector van de elementtakstromen is.

Dus

$$\begin{bmatrix} N_C & N_R & N_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_C \\ I_R \\ I_L \end{bmatrix} = 0 \quad (1)$$

(de rang van N is r)

en $P U = 0$,

d.w.z.

$$\begin{bmatrix} P_C & P_R & P_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_C \\ U_R \\ U_L \end{bmatrix} = 0, \quad (2)$$

(de rang van P is $(n - r)$)

waarin C, R, L de condensator-, weerstands- en spoelpoorten aanduiden.

De element-vergelijkingen zijn

$$I_C = \lambda C U_C \quad (3)$$

$$U_R = R I_R \quad (4)$$

$$U_L = \lambda L I_L, \quad (5)$$

waarin C, R, L positieve, diagonale, niet-singuliere matrices van de capaciteiten, weerstanden en zelfinducties zijn.

Uit (1) t/m (5) volgt:

$$\begin{bmatrix} \lambda N_C C & N_R & N_L \\ P_C & P_R R & \lambda P_L L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_C \\ I_R \\ I_L \end{bmatrix} = 0, \quad (6)$$

Stel

$$D = \begin{bmatrix} \lambda N_C C & N_R & N_L \\ P_C & P_R R & \lambda P_L L \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Dan is de voorwaarde dat U_C, I_R, I_L niet alle nul zijn:

$$\det D = 0. \quad (8)$$

Dit is de karakteristieke vergelijking van het netwerk.

We zullen nu de graad van deze vergelijking bepalen.

We beschouwen daartoe eerst de volgende matrix-identiteit:

$$\begin{bmatrix} \lambda N_C C & N_R & N_L \\ P_C & P_R R & \lambda P_L L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda G & 0 \\ 0 & 0 & L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N'_C & P'_C \\ N'_R & P'_R \\ N'_L & P'_L \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 N_C C N'_C + \lambda N_R G N'_R + N_L L^{-1} N'_L & \lambda^2 N_C C P'_C + \lambda N_R G P'_R + N_L L^{-1} P'_L \\ \lambda (P_C N'_C + P_R N'_R + P_L N'_L) & \lambda (P_C P'_C + P_R P'_R + P_L P'_L) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{Hierin is } G = R^{-1}. \quad (10)$$

De uitdrukking links onderaan in de matrix in het rechterlid van (9) is gelijk aan $\lambda P N'$ en is dus een nulmatrix (§ III.5.).

De orde van de submatrices is als volgt:

C is vierkant, dus is de orde van $N_C C N'_C$ gelijk aan de orde van $N_C N'_C$

Nu is N_C van orde $r \times c$, dus $N_C N'_C$ is van de orde $r \times r$.

Overeenkomstig zijn de andere termen in de sub-matrix, linksboven van het rechterlid van (9), ook van orde $r \times r$.

De orde van de andere submatrices is bijgeschreven in het rechterlid van (9).

We nemen nu de determinant van het linkerlid van (9). Dit kan omdat het een matrixproduct is van vierkante matrices. Wij nemen evenzo de determinant van het rechterlid van (9). Deze determinanten zijn gelijk:

$$\det D \lambda^{c+g} \det G \det L^{-1} \det \begin{bmatrix} N' & P' \end{bmatrix} = \\ = \det \left[\lambda^2 N_C N'_C + \lambda N_R G N'_R + N_L L^{-1} N'_L \right] \cdot \lambda^{n-r} \det \begin{bmatrix} P P' \end{bmatrix}, \quad (11)$$

waarin c het aantal condensatoren en g het aantal geleidingen is. Immers volgens de Laplace-ontwikkeling van een determinant is

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det A \det C, \quad (12)$$

als A en C vierkant zijn.

Het eerste deel van het rechterlid van (11) kan dus worden geschreven als:

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} N_C & N_R & N_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2 C & 0 & 0 \\ 0 & \lambda G & 0 \\ 0 & 0 & L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N'_C \\ N'_R \\ N'_L \end{bmatrix} \right\} \quad (13)$$

$$\text{d.w.z. als } \det \begin{bmatrix} T & T' \end{bmatrix} \text{ waarin } T = \begin{bmatrix} N_C & N_R & N_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda C^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & L^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Derhalve is volgens de beschouwingen van § II.6. $\det \begin{bmatrix} T & T' \end{bmatrix}$ niet identiek nul.

Op dezelfde wijze is ook $\begin{bmatrix} P & P' \end{bmatrix}$ niet-singulier. Verder is de matrix $\begin{bmatrix} N' & P' \end{bmatrix}$ ook niet-singulier (opgave: Toon dit aan!).

Dus kunnen we (11) gebruiken om de graad van $\det D$ te bepalen, wanneer wij de graad van $\det \left[\lambda^2 N_C N'_C + \lambda N_R G N'_R + N_L L^{-1} N'_L \right]$ kunnen bepalen.

Wij rangschikken nu de kolommen van N op de volgende manier:

$$N = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & N_{25} & N_{26} & N_{27} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & N_{36} & N_{37} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & N_{47} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} r \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (15)$$

$$\begin{matrix} c_2 & g_3 & l_4 & c_5 & g_6 & l_7 \end{matrix}$$

Hierin worden de kolommen gekozen in de volgorde c_2, g_3, l_4 en met symboolaanduiding:

c_2 een stelsel onafhankelijke*) condensatorspanningen, en maximaal in aantal.

g_3 een stelsel geleidingspanningen, die zowel onderling als van de spanningen c_2 onafhankelijk zijn en maximaal in aantal.

l_4 een stelsel spoelspanningen, die zowel onderling als van de spanningen c_2 en g_3 onafhankelijk zijn en maximaal in aantal.

c_5, g_6, l_7 de overige condensator-, geleiding- en spoelspanningen.

In hoofdstuk VI wordt nader ingegaan op de wijze waarop deze spanningen kunnen worden gekozen.

Daarbij wordt ook aangetoond dat \mathbf{N} inderdaad de vorm (15) heeft.

Overeenkomstig worden de kolommen en rijen van de diagonaalmatrix als volgt gerangschikt:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda G_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_7^{-1} \end{bmatrix}$$

Beschouw nu de matrix \mathbf{F} , welke de uitgewerkte versie van (14) is onder de voorwaarde (15):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda C_2^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \lambda N_{25} C_5^{\frac{1}{2}} & \lambda^{\frac{1}{2}} N_{26} G_6^{\frac{1}{2}} & N_{27} L_7^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & \lambda^{\frac{1}{2}} G_3^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \lambda^{\frac{1}{2}} N_{36} G_6^{\frac{1}{2}} & N_{37} L_7^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & L_4^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & N_{47} L_7^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (16)$$

*) Onder afhankelijkheid van spanningen of stromen wordt verstaan voorwaarden die uitsluitend uit de wetten van Kirchhoff en uit transformatorvergelijkingen volgen.

zodat (13) wordt:

$$\det F F'. \quad (17)$$

Wij ontwikkelen deze determinant volgens de stelling van Binet-Cauchy en verkrijgen

$$\det F F' = \sum_m T_m^2 \quad (18)$$

waarin T_m determinanten van de orde r uit F zijn.

De termen met de hoogste macht van λ worden verkregen door T_m te kiezen met een maximaal aantal onafhankelijke kolommen met λ als factor, gevolgd door een maximaal aantal kolommen met $\lambda^{\frac{1}{2}}$ als factor en wel, zowel onderling als van de reeds gekozen kolommen, onafhankelijk (anders zou T_m nul zijn). We moeten hierbij bedenken, dat de vierde kolom van F afhankelijk is van de eerste, en de vijfde afhankelijk van de eerste en de tweede; zie (15) en (16). Daar alle termen in $\sum T_m^2$ positief zijn, is deze hoogste macht van λ in T_m ook aanwezig in de sommatie.

Dus is deze hoogste macht gelijk aan $2c_2 + g_3$. Volgens (11) is dus de graad van det D :

$$n - r + 2c_2 + g_3 - (c + g). \quad (19)$$

$$\text{Met } n = c + g + 1 \quad (20)$$

en

$$r = c_2 + g_3 + l_4, \quad (21)$$

volgt

$$\text{graad van det } D \text{ is } l_7 + c_2. \quad (22)$$

De graad van de karakteristieke vergelijking, dus de orde van het netwerk, dus de orde van de differentiaalvergelijking van de vrije trillingen is gelijk aan de som van het aantal onafhankelijke condensatorspanningen en het aantal onafhankelijke spoelstromen.

Opmerkingen:

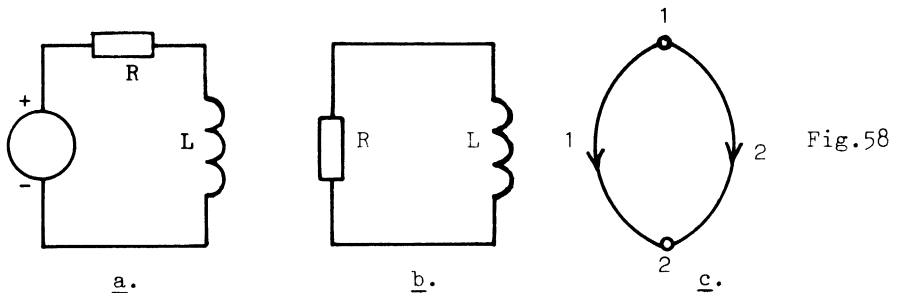
1. Het aantal onafhankelijke condensatorspanningen en spoelstromen is gelijk aan het aantal onafhankelijke integratieconstanten in de differentiaalvergelijking van de vrije trillingen, m.a.w. het aantal

beginvoorwaarden voor de energieverdeling in het netwerk.

2. Dat nogal omslachtige algebraïsche bewerkingen nodig zijn om deze gelijkheid te bewijzen, lijkt op het eerste gezicht ongeloofwaardig. De gelijkheid is echter in het algemeen ongeldig voor netwerken met negatieve elementen (-R, -L, -C) of met bouwstenen, die niet reciprook zijn.
3. De vorm van de hier gegeven karakteristieke vergelijking bevat alle eigenfrequenties en geen extra factoren, die in een eliminatieprocedure toevallig ontstaan, maar die niets met de vrije trillingen van het netwerk te maken hebben. Bij het toepassen van de maasmethode of knooppuntmethode verkeert men vaak in onzekerheid over het aantal eigenfrequenties "nul".
4. Bij schakelproblemen, en zonder de theorie van dit hoofdstuk, leidt men vaak een differentiaalvergelijking en een corresponderende karakteristieke vergelijking af van de verkeerde orde. Het gevolg is of verkeerde conclusies of omslachtig rekenwerk. Dit is altijd te voorkomen wanneer men uitgaat van de theorie van dit en het volgende hoofdstuk.

We behandelen nu twee voorbeelden:

Voorbeeld 1.



We maken de bronsterkte nul; fig.58b resulteert. De graph is dan volgens fig.58c.

$$\text{We vinden: } Q = \begin{bmatrix} R & L \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

De matrix C bestaat niet (en is dus ook niet nul!).

De corresponderende kolommen in de matrices worden dan weggelaten.

$$\begin{aligned}
 L &= [L] \\
 R &= [R] \\
 \text{dus } D &= \begin{bmatrix} \lambda Q_C C & Q_R & Q_L \\ B_C & B_R R & B_L \lambda L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_R & Q_L \\ B_R R & R_L \lambda L \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R & \lambda L \end{bmatrix} \quad \text{dus } \det D = \lambda L + R.
 \end{aligned}$$

De karakteristieke vergelijking is dus $\lambda L + R = 0$.

Voorbeeld 2.

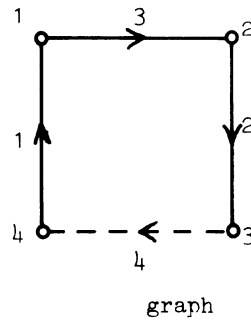
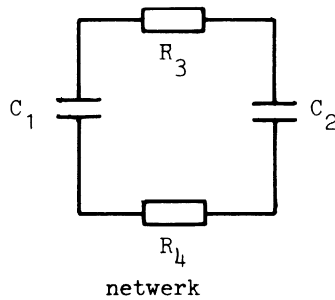


Fig.59

De koorde is gestippeld.

We vinden:

$$B = \begin{array}{c|cccc} & C & C & R & R \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\text{dus } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad R = \begin{bmatrix} R_3 & 0 \\ 0 & R_4 \end{bmatrix},$$

$$\text{dus } \lambda Q_C C = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda C_1 & 0 \\ 0 & \lambda C_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$Q_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_R R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_3 & 0 \\ 0 & R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_3 & R_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{dus } \det D &= \det \begin{bmatrix} \lambda Q_C C & Q_R \\ B_C & B_R R \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda C_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda C_2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & R_3 & R_4 \end{bmatrix} = \lambda^2 C_1 C_2 (R_3 + R_4) + \lambda (C_1 + C_2) \end{aligned}$$

De karakteristieke vergelijking is dus

$$\lambda^2 C_1 C_2 (R_3 + R_4) + \lambda (C_1 + C_2) = 0.$$

Vraag: Wat gebeurt als $C_1 = -C_2$? Verklaar dit verschijnsel fysisch.

Eveneens als $R_3 = -R_4$.

V. DE TOESTANDSVERGELIJKINGEN

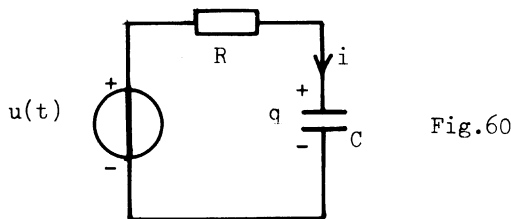
In alle hoofdstukken tot dusverre hebben wij ons beperkt tot spanningen en stromen die exponentiële functies van de tijd zijn, met als speciaal geval de constante spanningen en stromen.

Er zijn echter allerlei andere mogelijke tijdverlopen van spanning en stroom denkbaar, die ook voor de elektrotechniek van grote betekenis zijn. Om deze meer algemene situatie te bestuderen, keren wij terug naar de basis algebraïsche en differentiaalvergelijkingen, die de netwerkelementen volledig beschrijven.

Na een studie van enige eenvoudige voorbeelden zullen wij ingaan op de afleiding van het complete stelsel differentiaalvergelijkingen in standaardvorm. Hierna zal het mogelijk zijn allerlei schakelproblemen op systematische wijze op te lossen.

V.1. Een systeem van de eerste orde.

Wij beschouwen het netwerk van fig.60.



Stel dat $u(t)$ bekend is. Gevraagd: $i(t)$ voor $t \geq 0$.

De voorgeschiedenis van het netwerk voor $t < 0$ interesseert ons niet, zelfs niet of het netwerk heeft bestaan voort $t < 0$. Wij veronderstellen alleen dat voort $t \geq 0$ het netwerk bestaat en dat stroom en spanning aanwezig zijn. Wij vinden

$$u = Ri + \frac{1}{C} q ,$$

waarin q de lading op de condensator is. Door differentiatie van deze vergelijking verkrijgen wij de differentiaalvergelijking:

$$\frac{du}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i ,$$

waarbij gebruik gemaakt is van de relatie $i = \frac{dq}{dt}$.

Uit de theorie der differentiaalvergelijkingen is bekend, dat de oplossing van zo'n vergelijking van de eerste orde eenduidig bepaald is voor $t > 0$, indien de beginwaarde $i(0)$ van $i(t)$, en de functie $u(t)$ voor $t \geq 0$, bekend zijn.

Het is van geen betekenis op welke wijze de stroomwaarde $i(0)$ werd bereikt. Dit kunnen wij anders zeggen door te stellen dat de toestand waarin het netwerk zich op $t = 0$ verkeert voor het gedrag bepalend is en niet de voorgeschiedenis.

Wij zullen in een later stadium nader op het begrip toestand ingaan; voorlopig is het voldoende als wij enig intuïtief begrip van het woord toestand hebben, zoals dit in het normaal taalgebruik voorkomt.

V.2. Een systeem van de tweede orde.

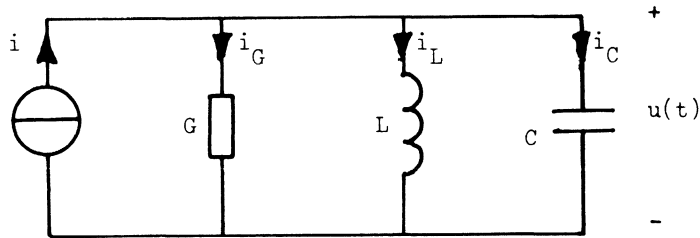


Fig.61

Stel $i(t)$ is bekend.

Gevraagd: $u(t)$ van $t \geq 0$.

Wij vinden

$$i = Gu + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} . \text{ Na differentiatie volgt de differentiaal-}$$

vergelijking:

$$C \frac{d^2 u}{dt^2} + G \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = \frac{di}{dt} .$$

Ook hier moet men voor de oplossing beschikken over

- de excitatie $i(t)$ voor $t \geq 0$
- de gegevens over $u(t)$ op $t = 0$.

Omdat het hier een tweede-orde differentiaalvergelijking betreft, moet men voor de oplossing beschikken over twee onafhankelijke beginvoorwaarden.

Immers de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking:

$$C \frac{d^2 u}{dt^2} + G \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = 0 \text{ is } u_h = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \text{ en bevat twee onbekende}$$

constanten A en B.

De eenvoudigste gegevens over $u(t)$ op $t = 0$ zijn $u(0)$ en $\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0}$, maar ook zouden twee onafhankelijke lineaire combinaties van deze grootheden voldoende zijn.

V.3. Een andere formulering.

Stellen we $u(t) = x(t)$ en $\frac{du(t)}{dt} = y(t)$ dan volgt hieruit en uit de tweede-orde differentiaalvergelijking:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{LC} x - \frac{G}{C} y + \frac{1}{C} \frac{di}{dt}.$$

Dit zijn twee eerste orde differentiaalvergelijkingen die equivalent aan de oorspronkelijke tweede-orde vergelijking zijn.

In matrixvorm:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} i.$$

De vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ beschrijft het gedrag van het netwerk voor $t \geq 0$, terwijl de vector $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$ de toestand geeft, waarin het netwerk zich op

$t = 0$ bevindt.

V.4. Energiebeschouwing

In dit voorbeeld hangen de beide beginvoorwaarden $x(0)$ en $y(0)$ samen met de energie, die op $t = 0$ in het systeem is opgeslagen.

Immers $x(0) = u(0)$ en deze bepaalt de elektrische veldenergie in de condensator op $t = 0$. Dat $y(0)$ mede bepaald wordt door de magnetische energie in de spoel is als volgt in te zien:

$$i = i_G + i_C + i_L,$$

$$i = Gu + C \frac{du}{dt} + i_L,$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{C} i - \frac{G}{C} u - \frac{1}{C} i_L,$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = \frac{1}{C} i(0) - \frac{G}{C} u(0) - \frac{1}{C} i_L(0),$$

$$\text{dus } y(0) = \frac{1}{C} i(0) - \frac{G}{C} x(0) - \frac{1}{C} i_L(0).$$

De eerste term in het rechterlid is de bekende excitatie, de tweede term is de bekende eerste beginvoorwaarde, zodat $y(0)$ vastligt als $i_L(0)$ bekend is. Als $i_L(0)$ bekend is, dan ligt de magnetische energie op $t = 0$ ook vast.

V.5. Resumé

De toestand van het netwerk op $t = 0$ kan beschreven worden of met

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} \end{bmatrix}$$

of met

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix}.$$

Algemeen geldt, dat wanneer een systeem te beschrijven is door een stelsel differentiaal- en algebraïsche vergelijkingen (dat een eenduidige oplossing heeft) het gehele gedrag van het systeem na het tijdstip $t = t_0$ uitsluitend van de vorm van de vergelijkingen en de waarden van de variabelen op t_0 afhangt. De voorgeschiedenis $t < t_0$ speelt geen rol. Dit is een voorbeeld van wat wij een causaal systeem noemen. Ruwweg wil dit zeggen dat het gedrag van het systeem op het tegenwoordige tijdstip onafhankelijk is van wat er in de toekomst zal gebeuren. Het minimale aantal gegevens, dat wij op t_0 nodig hebben om het verdere gedrag van het systeem te bepalen, wanneer de vergelijkingen bekend zijn, is kenmerkend voor de toestand. Bij een systeem dat door integraalvergelijkingen wordt beschreven, gelden deze beschouwingen niet, tenzij er aan bepaalde nevenvoorwaarden wordt voldaan, zodat de integraal-vergelijkingen equivalent

aan differentiaalvergelijkingen zijn.

Een voorbeeld van een systeem, waarvan het gedrag in het algemeen niet op eenvoudige wijze te bepalen is, is een spoel met ferromagnetische kern. Hier wordt de toestand niet bepaald door de stroom, maar door de energieën van alle magnetische domeinen in het materiaal. Hiervoor is dan nodig een veel ingewikkelder stelsel vergelijkingen met vele variabelen om het gedrag te bepalen. Het systeem is in feite zo ingewikkeld, dat nog geen bevredigende mathematische beschrijving is gevonden, om het systeem adequaat te modelleren. We hebben echter op fysische gronden alle reden te veronderstellen, dat het systeem toch causaal is.

V.6. Een systeem van de n^{de} orde.

Een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten en van de n^{de} orde is equivalent aan n eerste-orde differentiaalvergelijkingen.

$$\text{Stel} \quad a_n \frac{d^n i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 i = f(t) \quad (1)$$

$$\text{Stel } i = y_0 \quad \frac{di}{dt} = y_1$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{d^2 i}{dt^2} = y_2 \quad (2)$$

$$\frac{dy_{n-2}}{dt} = \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} = y_{n-1},$$

dan wordt (1)

$$a_n \frac{dy_{n-1}}{dt} + a_{n-1} y_{n-1} + \dots + a_0 y_0 = f(t). \quad (3)$$

(2) en (3) te zamen zijn n eerste orde-differentiaalvergelijkingen, welke wij als volgt kunnen schrijven:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_0 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \cdot \\ \dot{y}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-a_0}{a_n} & \frac{-a_1}{a_n} & \frac{-a_2}{a_n} & \dots & \frac{-a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

Omgekeerd kan worden aangetoond dat n differentiaalvergelijkingen met n onbekenden, met constante coëfficiënten en van de eerste orde, kunnen worden gereduceerd tot één differentiaalvergelijking van de n^{de} orde met één onbekende.

V.7. Het begrip "toestand"

Onder de toestand van een netwerk op een tijdstip t_0 verstaan we een vector van de laagst mogelijke orde, die zodanig is gekozen, dat daarmee het toekomstige gedrag (dus na het tijdstip t_0) kan worden bepaald, als de excitaties en de opbouw van het netwerk bekend zijn.

Voor het netwerk van fig.61 kan de toestand op $t = 0$ worden gekarakteriseerd door de vector

$$\begin{bmatrix} u_C(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix} \quad \text{en ook door de vector} \quad \begin{bmatrix} u_C(0) \\ \left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} \end{bmatrix}$$

De tweede is een lineaire transformatie van de eerste. De toestand kunnen wij opvatten als de verzameling van alle vectoren, die door niet-singuliere lineaire transformaties uit

$\begin{bmatrix} u_C(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix}$ volgen en waarvan alle elementen betrekking hebben op $t = 0$.

Opmerkingen:

Het belangrijke punt is dat de vector, die wij de toestandsvector willen noemen, van minimale orde is.

Het netwerk van fig.60 bijv. had ook beschreven kunnen worden door de vergelijking:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = R \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{di}{dt}.$$

Dit is een tweede-orde vergelijking; wij zouden dus verwachten dat de toestandsvector twee onafhankelijke elementen zou bevatten. Dit is echter niet het geval, daar $i(0)$ en $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0}$ afhankelijk zijn. Voor dit netwerk geldt nl. $R \frac{di}{dt} = -\frac{1}{C} i + \frac{du}{dt}$. Bij bekende excitaties is $\frac{di}{dt}$ inderdaad afhankelijk van i .

In het algemeen is het van groot belang dat wij bij de afleiding een stelsel vergelijkingen van de juiste orde verkrijgen; anders kunnen verkeerde conclusies over het gedrag van het netwerk worden getrokken. In dit verband kunnen de beschouwingen van hoofdstuk IV een belangrijke contrôle op de afleiding geven, daar, zoals zal blijken, de graad van de karakteristieke vergelijking gelijk is aan de orde van de differentiaalvergelijking met één onbekende, die volgt door eliminatie van alle variabelen op één na uit het complete stelsel netwerkvergelijkingen. Deze graad is ook gelijk aan het aantal onafhankelijke eerste-orde vergelijkingen.

Voor een netwerk zonder reactieve componenten is het voor de beschrijving van het gedrag voldoende, bekend te zijn met de excitaties en de structuur. Er zijn geen beginvoorwaarden; de toestandsvector is van dimensie nul.

V.8. Keuze van de toestandvector.

In V.5. vonden we twee verschillende, maar equivalenten vectoren van de beginwaarden. Van deze beginvoorwaarden is

$$\left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} \text{ het moeilijkst te vinden.}$$

In het algemeen is het veel gemakkelijker uit te gaan van initiële spoelstromen en condensatorspanningen. Op grond hiervan hebben we voorkeur voor de vector $\begin{bmatrix} u_C(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix}$.

Een tweede reden voor onze voorkeur is, dat in het geval van netwerken opgebouwd uit bronnen, weerstanden, spoelen en condensatoren, het mogelijk is op eenvoudige wijze m.b.v. de graphtheorie de toestandsvector te bepalen. De elementen van de toestandsvector zijn (topologisch) onafhankelijke condensatorspanningen en de onafhankelijke spoelstromen.

Dit zijn de grootheden, die het best overeenkomen met wat wij, vanuit een fysisch en intuïtief standpunt bezien, de toestand zouden noemen. Aldus wordt het netwerk van fig.61 dan gekarakteriseerd met

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i .$$

Het behoeft geen betoog, dat ook de spoelflux

$$\phi = Li$$

en de condensatorlading

$$q = Cu$$

geschikte elementen van de toestandsvector zouden zijn.

V.9. Het formuleren van netwerkproblemen met behulp van toestandsvergelijkingen.

V.9.1. Het eerste-orde netwerk onder V.1. kan worden beschreven met

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q + \frac{u}{R} ,$$

dus in de vorm

$$\dot{x} = fx + gw ,$$

waarin x de toestand en w de excitatie is, terwijl f en g voor het systeem kenmerkende scalars zijn.

Een stelsel simultane eerste-orde differentiaalvergelijkingen kan worden geschreven in matrixvorm:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{F}\underline{x} + \underline{G}\underline{w} .$$

Hierin is \underline{x} de toestandsvector, \underline{w} de vector van de excitaties en \underline{F} en \underline{G} voor het systeem kenmerkende matrices, die worden bepaald door de elementwaarden en de netwerkconfiguratie.

V.9.2. Voorbeeld van een derde-orde differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^3 i}{dt^3} + 2 \frac{d^2 i}{dt^2} + 3 \frac{di}{dt} + 4i = 5 \sin t .$$

Stel $i = x_1$, $\frac{di}{dt} = x_2$, $\frac{d^2i}{dt^2} = x_3$, dan is

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5 \sin t$$

of in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 5 \sin t$$

V.9.3. Voorbeeld van een stelsel hogere-orde differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{di}{dt} + \frac{du}{dt} + 2i = 3,$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 4 \frac{du}{dt} + 5u = 6.$$

Stel $i = x_1$, $\frac{di}{dt} = x_2$, $u = x_3$.

Dan is $\frac{dx_1}{dt} = x_2$

$$\frac{du}{dt} = 3 - 2i - \frac{di}{dt}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -2x_1 - x_2 + 3$$

enz.

zodat

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Door linksvermenigvuldiging met

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vinden wij

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -5 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

V.9.4. Voor het oplossen van deze differentiaalvergelijkingen moet men de hogere afgeleiden op $t = 0$ kennen. Bij netwerkproblemen echter kan men deze waarden van de hogere afgeleiden in het algemeen niet op eenvoudige wijze bepalen. Het is daarom beter de topologie van het begin af in de beschouwingen te nemen; men krijgt dan niet alleen een stelsel vergelijkingen van minimale orde maar ook de voor dat stelsel vergelijkingen meest geschikte beginvoorwaarden.

V.9.5. Toestandsvergelijkingen en graphtheorie.

Voorbeeld:

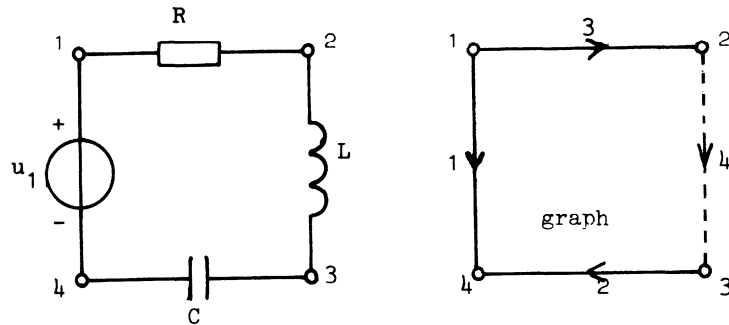


Fig.62

met de snede-matrix vinden we

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & Q_2 \end{bmatrix} \underline{i} = 0;$$

met $B_1 = -Q'_2$ volgt

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = 0;$$

verder geldt

$$\begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pC & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{en } u_4 = pL i_4,$$

waarbij $p \equiv \frac{d}{dt}$, zodat bijv. $pC u_2$ betekent $C \frac{du_2}{dt}$.

We kiezen voor de toestandsvector u_2 en i_4 , d.w.z. de condensatorspanning en speelstroom.

Dan volgt na eliminatie van i_1, i_2, i_3, u_3 en u_4 :

$$p \begin{bmatrix} u_2 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{LG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u_1.$$

Voor de oplossing hiervan moet men kennen $u_2(0)$ en $i_4(0)$. (Zie § V.3).

Zouden we rechtstreeks de differentiaalvergelijking in i opschrijven, dan krijgen we

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du_1}{dt}.$$

Voor de oplossing hiervan moeten we kennen

$$i(0) \text{ en } \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}.$$

Voor een dergelijk eenvoudig netwerk is de eerste-orde afgeleide op $t = 0$ nog wel eenvoudig te vinden; voor ingewikkelder netwerken is de graphtheorie onontbeerlijk.

VI. ALGEMENE TOESTANDSVERGELIJKINGEN IN MATRIX-VORM

VI.1. Inleiding.

Wij zullen nu ingaan op een systematische wijze om de toestandsvergelijkingen van een netwerk opgebouwd uit bronnen, weerstanden, capaciteiten, zelfinducties en transformatoren af te leiden.

Hierbij is het van belang dat eerst een compleet stelsel onafhankelijke toestandsgrootheden wordt gekozen, dat overeenkomt met de werkelijke fysische toestand van het netwerk, nl. de energie-verdeling.

Dankzij de bijzondere eigenschappen van niet-energetische n-poortnetwerken is het mogelijk, door de matrices van de voren op een geschikte wijze te rangschikken, een groot deel van de nogal omslachtige eliminatie-procedure te vermijden. Het inzicht dat men op deze wijze in de structuur van de vergelijkingen krijgt, blijkt van groot nut te zijn wanneer men de verzameling van toegestane netwerkelementen uitbreidt tot actieve en niet-reciproke elementen. Hetzelfde inzicht in de structuur is ook van belang wanneer men regeltechnische systemen aan de hand van de toestandsvergelijkingen bestudeert.

VI.2. Algemene formulering.

Wij gaan uit van de \mathbf{N} -matrix overeenkomstig de vorm van vergelijking IV.5. maar dan rekening houdend met de spannings- en stroombronnen:

$$\mathbf{N} = \begin{matrix} & \begin{matrix} u & c & g & l & c & g & l & i \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & N_{15} & N_{16} & N_{17} & N_{18} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & N_{25} & N_{26} & N_{27} & N_{28} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & N_{36} & N_{37} & N_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & N_{47} & N_{48} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (1)$$

Om de discussie zo concreet mogelijk te houden, beschouwen wij eerst het geval van een transformatorloos netwerk. De \mathbf{N} -matrix wordt dan de \mathbf{Q} -matrix, m.b.t. een geschikt gekozen boom. Wij kiezen de takken van de boom volgens het hierna volgende prioriteitenschema:

1. Alle spanningsbrontakken. Deze takken worden in de \mathbf{N} -matrix met de index 1 aangeduid.

In overeenstemming met hoofdstuk II is dit altijd mogelijk als

het netwerkprobleem een eenduidige oplossing heeft. Het feit dat alle spanningen en stromen nu willekeurige functies van de tijd kunnen zijn, ontkracht de beschouwingen over lussen van spanningsbronnen niet.

2. Een maximum aantal condensatorakken. Deze takken worden met de index 2 aangeduid. Er kunnen natuurlijk wel condensatoren zijn die te zamen met de takken $\{1\} \cup \{2\}$ een lus vormen. Zulke takken worden automatisch bij de koorden gerangschikt en aangeduid met de index 5.
3. Een maximum aantal weerstandtakken. Deze takken worden met de index 3 aangeduid. De overige weerstanden die bij de koorden behoren, worden met de index 6 aangeduid.
4. De boom wordt gecompleteerd met spoeltakken die met de index 4 worden aangeduid. De overige spoelen zijn dan koorden en worden met de index 7 aangeduid.
Alle stroombronnen komen dan automatisch in de co-boom, daar er anders een snede van stroombronnen zou bestaan en het netwerkprobleem geen eenduidige oplossing zou hebben.
Deze takken worden met de index 8 aangeduid.

Een boom die op deze manier wordt gekozen, heet een standaardboom.

Het kan zijn dat sommige van de bovengenoemde verzamelingen van takken lege verzamelingen zijn. In zo'n geval ontbreken de corresponderende kolommen in de \mathbf{N} -matrix.

Verder is het zo, dat deze keuze van de boom equivalent is aan het kiezen van de co-boom volgens het prioriteitenschema:

1. alle stroombronnen
2. een maximum aantal spoelen. (Door de keuze van de standaardboom werd juist een minimum aantal spoelen in de boom gekozen).
3. een maximum aantal weerstanden.
4. aanvulling met condensatoren (d.w.z. een minimum aantal condensatoren en dus een maximum aantal condensatoren in de boom).

Uiteraard is het veel gemakkelijker eerst de boom te kiezen en dan de co-boom af te leiden, dan omgekeerd.

Op het eerste gezicht lijkt het wel vreemd dat beide recepten een maximum aantal weerstanden zowel in de boom als in de co-boom voorschrijven. Wij moeten echter rekening houden met de volgorde van de keuze. Na de spanningsbronnen en de condensatoren gekozen te hebben, is slechts een minimum aantal spoelen in de boom te krijgen wanneer de open plaatsen in de boom zoveel mogelijk met weerstanden worden opgevuld. Eveneens wanneer de stroombronnen en spoelen gekozen zijn, is slechts een minimum aantal condensatoren in de co-boom te krijgen wanneer de open plaatsen in de co-boom zoveel mogelijk met weerstanden worden opgevuld.

Wij moeten nu aantonen dat de Q -matrix behorende bij een standaard-boom inderdaad de structuur van (1) heeft. Volgens hoofdstuk II moeten dan de vier eerste kolomgroepen de eenheidsmatrix bevatten. De corresponderende B - of P -matrix is dan van de vorm:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} u & c & g & l & c & g & l & i \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} -N'_{15} & -N'_{25} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -N'_{16} & -N'_{26} & -N'_{36} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -N'_{17} & -N'_{27} & -N'_{37} & -N'_{47} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -N'_{18} & -N'_{28} & -N'_{38} & -N'_{48} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (2)$$

Beschouwen wij nu de spanningsvergelijkingen (spanningswet van Kirchhoff) dan blijkt dat volgens de eerste rijgroep, er slechts spanningsbronnen en condensatoren voorkomen in lussen die door condensatorcoorden worden bepaald. Dit moet toch het geval zijn; anders hadden wij geen maximum aantal condensatoren in de boom. Derhalve moeten Q'_{35} en Q'_{45} nul zijn.

Op gelijke manier zien wij dat Q'_{46} nul is; anders zouden de lussen die door weerstandskoorden worden bepaald ook spoelen bevatten, hetgeen betekent dat de boom geen minimum aantal spoelen bevat. Aan de andere kant is het eenvoudig in te zien dat i.h.a. geen andere sub-matrix van Q uit de kolomgroepen 5 t/m 8 nul hoeft te zijn.

Opgave: Leid dezelfde conclusies rechtstreeks uit (1) door duale beschouwingen af.

Met deze concrete graphtheoretische voorstelling van de structuur van \mathcal{Q} is het eenvoudig dezelfde vorm voor \mathcal{N} te vinden. Wij behoeven alleen de begrippen boomtak en koorde te vervangen door spanningspoort resp. stroompoort van het transformatornetwerk. Een eis zoals: maximum aantal condensatoren in de boom, nadat alle spanningsbronnen opgenomen zijn, wordt vervangen door: een maximum aantal condensatorspanningen die zowel onderling als van de sterkten van de spanningsbronnen onafhankelijk zijn. Onder afhankelijkheid wordt verstaan een voorwaarde die volgt uit de wetten van Kirchhoff of uit de transformatorvergelijkingen.

VI.3. Afleiding van de toestandsvergelijkingen.

Uit (1) vinden wij:

$$\dot{i}_1 + N_{15} \dot{i}_5 + N_{16} \dot{i}_6 + N_{17} \dot{i}_7 + N_{18} \dot{i}_8 = 0 \quad (3)$$

$$\dot{i}_2 + N_{25} \dot{i}_5 + N_{26} \dot{i}_6 + N_{27} \dot{i}_7 + N_{28} \dot{i}_8 = 0 \quad (4)$$

$$\dot{i}_3 + N_{36} \dot{i}_6 + N_{37} \dot{i}_7 + N_{38} \dot{i}_8 = 0 \quad (5)$$

$$\dot{i}_4 + N_{47} \dot{i}_7 + N_{48} \dot{i}_8 = 0. \quad (6)$$

Uit (2) vinden wij:

$$\underline{u}_5 = N'_{15} \underline{u}_1 + N'_{25} \underline{u}_2 \quad (7)$$

$$\underline{u}_6 = N'_{16} \underline{u}_1 + N'_{26} \underline{u}_2 + N'_{36} \underline{u}_3 \quad (8)$$

$$\underline{u}_7 = N'_{17} \underline{u}_1 + N'_{27} \underline{u}_2 + N'_{37} \underline{u}_3 + N'_{47} \underline{u}_4 \quad (9)$$

$$\underline{u}_8 = N'_{18} \underline{u}_1 + N'_{28} \underline{u}_2 + N'_{38} \underline{u}_3 + N'_{48} \underline{u}_4. \quad (10)$$

Verder gelden de elementrelaties:

$$\dot{i}_2 = \mathcal{P}_2 \underline{u}_2, \quad \dot{i}_3 = \mathcal{G}_3 \underline{u}_3, \quad \dot{i}_5 = \mathcal{P}_5 \underline{u}_5, \quad \dot{i}_6 = \mathcal{G}_6 \underline{u}_6 \quad (11)$$

$$\underline{u}_3 = R_3 \underline{i}_3, \quad \underline{u}_4 = pL_4 \underline{i}_4, \quad \underline{u}_6 = R_6 \underline{i}_6, \quad \underline{u}_7 = pL_7 \underline{i}_7, \quad (12)$$

waarin $p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}$.

Wij drukken nu de stromen door en spanningen over de weerstanden in de bronsterkten en de toestandsvariabelen uit. Deze laatste zijn de variabelen \underline{u}_2 en \underline{i}_7 , welke de energie-verdeling in het netwerk bepalen.

Uit (5) volgt met (11), (12) en (8):

$$G_3 \underline{u}_3 + N_{36} G_6 \left[N'_{16} \underline{u}_1 + N'_{26} \underline{u}_2 + N'_{36} \underline{u}_3 \right] + N_{37} \underline{i}_7 + N_{38} \underline{i}_8 = 0,$$

zodat

$$\begin{aligned} \left[G_3 + N_{36} G_6 N'_{36} \right] \underline{u}_3 + N_{36} G_6 N'_{16} \underline{u}_1 + N_{36} G_6 N'_{26} \underline{u}_2 + \\ + N_{37} \underline{i}_7 + N_{38} \underline{i}_8 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Nu is de matrix $G_3 + N_{36} G_6 N'_{36}$, welke wij met G zullen aanduiden, te schrijven in de vorm

$$\begin{bmatrix} 1 & N_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_3 & 0 \\ 0 & G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ N'_{36} \end{bmatrix}.$$

Volgens de beschouwingen in § II.6 is deze matrix niet-singulier, daar de eerste en laatste factoren in het product dezelfde rang hebben als het aantal rijen, resp. kolommen en de middelste factor een diagonale matrix met positieve elementen is.

Derhalve kunnen wij \underline{u}_3 uitdrukken in de overige variabelen in (13).

Uit (8) volgt met (11), (12) en (5):

$$R_6 \underline{i}_6 = N'_{16} \underline{u}_1 + N'_{26} \underline{u}_2 + N'_{36} R_3 \left[-N_{36} \underline{i}_6 - N_{37} \underline{i}_7 - N_{38} \underline{i}_8 \right],$$

zodat

$$\begin{aligned} \left[R_6 + N'_{36} R_3 N_{36} \right] \underline{i}_6 = N'_{16} \underline{u}_1 + N'_{26} \underline{u}_2 - N'_{36} R_3 N_{37} \underline{i}_7 \\ - N'_{36} R_3 N_{38} \underline{i}_8. \end{aligned} \quad (14)$$

Ook de matrix $R_6 + N'_{36} R_3 N_{36}$ is niet-singulier: wij duiden deze met R aan.

Met behulp van (13) en (14) kunnen wij nu \dot{u}_3 , \dot{u}_6 , u_3 , u_6 uit de overige vergelijkingen elimineren.

Uit (4), (11), (12) en met gebruikmaking van (7) en (14) vinden wij:

$$pC_2 \dot{u}_2 + pN_{25} C_5 \left[N'_{15} \dot{u}_1 + N'_{25} \dot{u}_2 \right] + N_{26} R^{-1} \left[N'_{16} \dot{u}_1 + N'_{26} \dot{u}_2 - N'_{36} R_3 N_{37} \dot{i}_7 - N'_{36} R_3 N_{38} \dot{i}_8 \right] + N_{27} \dot{i}_7 + N_{28} \dot{i}_8 = 0.$$

Daar $C_2 + N_{25} C_5 N'_{25} \stackrel{\text{def}}{=} C$ niet-singulier is, vinden wij door vermenigvuldiging met C^{-1} de eerste toestandsvergelijking:

$$p\dot{u}_2 = C^{-1} \left\{ -N_{26} R^{-1} N'_{26} \dot{u}_2 - \left[N_{27} - N_{26} R^{-1} N'_{36} R_3 N_{37} \right] \dot{i}_7 - \left[N_{26} R^{-1} N'_{16} + pN_{25} C_5 N'_{15} \right] \dot{u}_1 + \left[N_{26} R^{-1} N'_{36} R_3 N_{38} - N_{28} \right] \dot{i}_8 \right\}. \quad (15)$$

Uit (9), (11), (12) met gebruikmaking van (13) en (6) volgt:

$$pL_7 \dot{i}_7 = N'_{17} \dot{u}_1 + N'_{27} \dot{u}_2 + N'_{37} G^{-1} \left[-N_{36} G_6 N'_{16} \dot{u}_1 - N_{36} G_6 N'_{26} \dot{u}_2 - N_{37} \dot{i}_7 - N_{38} \dot{i}_8 \right] + pN'_{47} L_4 \left[-N_{47} \dot{i}_7 - N_{48} \dot{i}_8 \right].$$

d.w.z.

$$p \left[L_7 + N'_{47} L_4 N_{47} \right] \dot{i}_7 = \left[N'_{27} - N'_{37} G^{-1} N_{36} G_6 N'_{26} \right] \dot{u}_2 - N'_{37} G^{-1} N_{37} \dot{i}_7 + \left[N'_{17} - N'_{37} G^{-1} N_{36} G_6 N'_{16} \right] \dot{u}_1 - \left[N'_{37} G^{-1} N_{38} + pN'_{47} L_4 N_{48} \right] \dot{i}_8.$$

Daar $L_7 + N'_{47} L_4 N_{47} \stackrel{\text{def}}{=} L$ niet-singulier is, vinden wij door vermenigvuldiging met L^{-1} de tweede toestandsvergelijking:

$$p\dot{i}_7 = L^{-1} \left\{ \left[N'_{27} - N'_{37} G^{-1} N_{36} G_6 N'_{26} \right] \dot{u}_2 - N'_{37} G^{-1} N_{37} \dot{i}_7 + \left[N'_{17} - N'_{37} G^{-1} N_{36} G_6 N'_{16} \right] \dot{u}_1 - \left[N'_{37} G^{-1} N_{38} + pN'_{47} L_4 N_{48} \right] \dot{i}_8 \right\}. \quad (16)$$

Vergelijkingen (15) en (16) geven de toestandsvergelijkingen in de gezochte vorm:

$$p \begin{bmatrix} \underline{u}_2 \\ \underline{i}_7 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \underline{u}_2 \\ \underline{i}_7 \end{bmatrix} + G \underline{w},$$

waarin \underline{w} afhangt zowel van de excitaties \underline{u}_1 en \underline{i}_8 als van hun afgeleiden. Als deze differentiaalvergelijkingen zijn opgelost, kunnen alle andere spanningen en stromen in deze oplossing en de excitaties worden uitgedrukt aan de hand van (3) t/m (14).

VI.4. Opmerkingen:

1. Bij de samenstelling van de vergelijkingen lette men goed op de volgorde van de indices in een productterm.

Bij matrices die niet in getransponeerde vorm zijn, bijv. $N_{36} G_6$, wordt de laatste index van een factor herhaald als eerste index van de volgende factor.

Een term zoals G_6 is een diagonaalmatrix: de index 6 heeft betrekking op rijen en kolommen en is als zodanig als dubbele index te beschouwen. Komt een getransponeerde matrix voor, dan wordt de volgorde van de indices omgekeerd, bijv. $N'_{36} R_3$.

De termen R en G behoren bij de indices 6 resp. 3.

Tenslotte moet de allereerste index van een productterm, met inachtneming van de opmerking over transpositie, dezelfde zijn in alle termen in een vergelijking. Bijv. in verg.(16) is deze index 7. Met behulp van deze regels kan men de kans op het maken van fouten aanmerkelijk verminderen.

2. Iedere rij van een term zoals $L_7 + N'_{47} L_4 N_{47}$ heeft bij transformatorloze netwerken betrekking op de zelfinductie in een basislus, die bepaald wordt door een koorde uit $\{7\}$. De diagonaalterm is de totale lus-zelfinductie, de andere termen geven de gemeenschappelijke zelfinducties van de betrokken en andere lussen aan. Een vergelijking zoals (16) is in wezen een lusvergelijking die spanningsrelaties uitdrukt. Overeenkomstige relaties gelden voor de matrices R , G , C , waarbij de twee laatste matrices betrekking hebben op de geleidingen en capaciteiten in basisneden.

3. De vergelijkingen (15) en (16) zijn volledig dual. De formele overeenkomst klopt precies wanneer men in één van de vergelijkingen de submatrices uit \mathbf{N} vervangt door de corresponderende submatrices van de \mathbf{P} -matrix.
4. In feite zijn (15) en (16) een vermengde vorm van de \mathbf{B} - en de \mathbf{Q} -methoden van hoofdstuk II, of de \mathbf{P} - en de \mathbf{N} -methoden van hoofdstuk III, maar nu in de vorm van differentiaalvergelijkingen.
5. Het aantal eerste-orde differentiaalvergelijkingen is gelijk aan het aantal onafhankelijke condensatorspanningen (orde van \underline{u}_2) te zamen met het aantal onafhankelijke spoelstromen (orde van \underline{i}_7), zie hoofdstuk IV .
- Het is niet moeilijk aan te tonen dat een stelsel van n vergelijkingen van de vorm*

$$p\underline{x} = \underline{F}\underline{x} + \underline{G}\underline{w},$$

d.w.z.

$$(\underline{F} - p\underline{1})\underline{x} + \underline{G}\underline{w} = \underline{0},$$

- kan worden gereduceerd tot één vergelijking in één scalaire variabele en met coëfficiënten die polynomen in p zijn van graad n , door middel van een vorm van Gaussische eliminatie. In deze eliminatieprocedure zijn alle algebraïsche operaties op getallen toegestaan (zoals bij de gewone Gaussische methode). Er mag echter niet door p worden gedeeld, noch mag een rij van de coëfficiëntmatrix worden vermenigvuldigd met p . Wat wel toegestaan is: een rij vervangen door de som van die rij en het product van p en een andere rij. Op deze manier resulteren bij iedere eliminatie-stap differentiaalvergelijkingen waarvan de som van het aantal vergelijkingen en de hoogste orde van afgeleiden gelijk is aan $n + 1$.*
6. *Heel belangrijk in de afleiding is de manier waarop de operator p wordt gehanteerd. Wij werken steeds met differentiaalvergelijkingen van minimale orde of minimum aantal. Nergens wordt er geïntegreerd of onnodig gedifferentieerd. De operaties differentiatie en integratie commuteren in het algemeen niet,*

d.w.z., $1 = p \frac{1}{p} \neq \frac{1}{p} p$, waarbij wij onder de operator $\frac{1}{p}$ werkende op een functie verstaan een integraal $\int_t^0 d\tau$ werkende op een functie. De algebra van de operator p is in feite een polynoomring, d.w.z. alleen de operaties optellen en vermenigvuldigen van p met zichzelf of met getallen zijn toegestaan indien men zinvolle resultaten wil krijgen. Het is alleen door het hanteren van deze algebra op de juiste manier dat wij differentiaalvergelijkingen van de juiste orde en aantal kunnen afleiden.

7. De toestandsvergelijkingen vormen vaak het uitgangspunt voor de "computer-aided design" (C.A.D.) van elektronische schakelingen. Als men bijv. de schakeleigenschappen van een gefintegreerde schakeling in detail wil bepalen, dan moet men eerst vergelijkingen zoals (15) en (16) afleiden, rekening houdend met alle significante reactanties, en de vergelijkingen m.b.v. een computer numeriek integreren. Bij elektronische schakelingen is de afleiding wat ingewikkelder dan het hier is gepresenteerd, t.g.v. de aanwezigheid van bestuurde bronnen en niet-lineairiteiten. De basisprincipes zijn echter dezelfde.

VI.5. Het ontbreken van kolommen.

Het is heel goed mogelijk dat bepaalde kolommen in de N -matrix ontbreken. Als bijv. de kolommen $\{4\}$ en $\{5\}$ ontbreken dan geldt:

$$\begin{array}{cccccc}
 u & c & g & r & l & i \\
 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 8 \\
 N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & N_{16} & N_{17} & N_{18} \\ 0 & 1 & 0 & N_{26} & N_{27} & N_{28} \\ 0 & 0 & 1 & N_{36} & N_{37} & N_{38} \end{bmatrix} & & (17)
 \end{array}$$

Schrijven wij de vergelijkingen, die bij deze matrix behoren en die met (3) t/m (12) corresponderen uit, dan zien wij dat de nieuwe vergelijkingen uit de oude volgen door u_4 en i_5 gelijk nul te stellen. Dit heeft tot gevolg dat L_4 en C_5 ook nul moeten zijn. Hetzelfde kan worden bereikt door N_{15} , N_{25} , N_{47} en N_{48} gelijk nul te stellen.

Substitutie van deze voorwaarden in (15) en (16) levert dan:

$$\begin{aligned}
 p\underline{u}_2 = C_2^{-1} & \left\{ -N_{26} R^{-1} N'_{26} \underline{u}_2 + \left[N_{26} R^{-1} N'_{36} R_3 N_{37} - N_{27} \right] \underline{i}_7 \right. \\
 & \left. - N_{26} R^{-1} N'_{16} \underline{u}_1 + \left[N_{26} R^{-1} N'_{36} R_3 N_{38} - N_{28} \right] \underline{i}_8 \right\}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p\underline{i}_7 = L_7^{-1} & \left\{ \left[N'_{27} - N'_{37} G^{-1} N_{36} G_6 N'_{26} \right] \underline{u}_2 - N'_{37} G_1 N'_{37} \underline{i}_7 + \right. \\
 & \left. \left[N'_{17} - N'_{37} G^{-1} N_{36} G_6 N'_{16} \right] \underline{u}_1 - N'_{37} G^{-1} N_{38} \underline{i}_8 \right\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Als andere kolommen ontbreken, kunnen overeenkomstige resultaten worden afgeleid. De regel is: de submatrices van de **N**-matrix, die overeenkomen met de ontbrekende kolommen, worden gelijk nul gesteld, alsmede de corresponderende impedanties van boomtakken (spanningspoorten) en de corresponderende admittanties van koorden (stroompoorten).

Vraag: Hoe luiden de toestandsvergelijkingen als het netwerk geen weerstanden bevat?

VI.6. Voorbeelden:

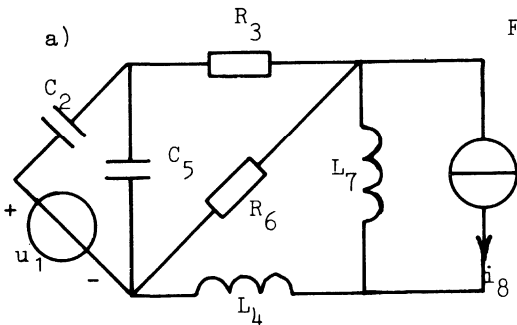
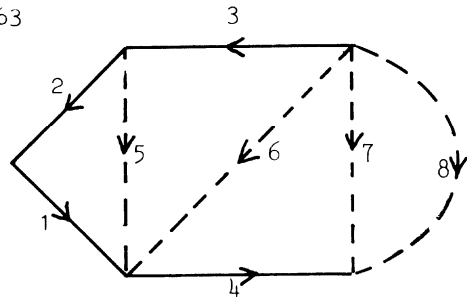


Fig.63



$$B = \begin{bmatrix}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

We vinden

$$\begin{aligned} C_2 &= C_2 & C_5 &= C_5 \\ R_3 &= R_3 & R_6 &= R_6 & G_3 &= G_3 & G_6 &= G_6 \\ L_7 &= L_7 & L_4 &= L_4 \end{aligned}$$

$$C = Q_{25} C_5 Q'_{25} + C_2 = C_2 + C_5 = \text{totaal snede-capaciteit}$$

$$G = G_3 + G_6 = \text{totale snede-geleiding}$$

$$L = L_4 + L_7 = \text{totale lus-zelfinductie}$$

$$R = R_3 + R_6 = \text{totale lus-weerstand.}$$

Dus (15) wordt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(C_2 + C_5) u_2 &= -\frac{u_2}{R_3 + R_6} + \left(-1 + \frac{R_3}{R_3 + R_6}\right) i_7 - \left(\frac{1}{R_3 + R_6} + \frac{d}{dt} C_5\right) u_1 + \\ &\quad + \left(-1 + \frac{R_3}{R_3 + R_6}\right) i_8 \end{aligned}$$

d.w.z.

$$\frac{d}{dt}(C_2 + C_5) u_2 = -\frac{u_2}{R_3 + R_6} - \frac{R_6}{R_3 + R_6} i_7 - \frac{u_1}{R_3 + R_6} - C_5 \frac{du_1}{dt} - \frac{R_6}{R_3 + R_6} i_8.$$

Evenzo vinden we met (16):

$$\frac{d}{dt}(L_4 + L_7) i_7 = \frac{G_3}{G_3 + G_6} u_2 + \frac{i_7}{G_3 + G_6} + \frac{G_3}{G_3 + G_6} u_1 - \frac{i_8}{G_3 + G_6} - L_4 \frac{di_8}{dt}.$$

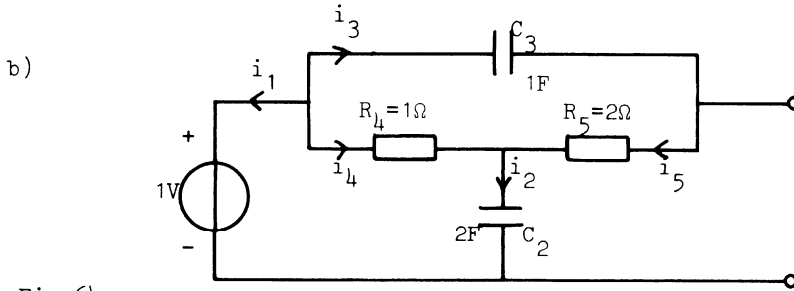
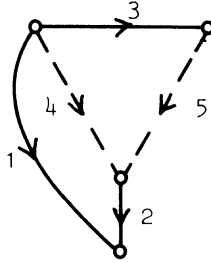


Fig.64



$$B = 6 \begin{array}{c|c|c|c|c|c} & u_v & c_2 & c_3 & r_4 & r_5 \\ \hline & 1 & \overbrace{2} & & \overbrace{6} & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{dus } Q = 2 \begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & \overbrace{2} & \overbrace{6} & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$-Q'_{16} = B_{61} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad -Q'_{26} = B_{62} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verder zijn alle andere relevante submatrices nul.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = 0, \quad G = 0.$$

Invullen in (15) en (16) levert op:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

VII. NETWERKEN MET SCHAKELAARS

VII.1. Inleiding.

Schakelen speelt in de elektrotechniek een belangrijke rol. Het in- of uitschakelen van een apparaat is een handeling, die iedereen in zijn dagelijks leven vele malen verricht.

De bedoeling van zo'n handeling is een energiebron in verbinding te brengen met het apparaat of een bestaande verbinding te onderbreken. Het schakelen is niet alleen in de energietechniek van groot belang: ook in de communicatietechniek en vooral de informatietechnologie is het maken en onderbreken van verbindingen tussen apparaten onderling, door middel van schakelaars, van primaire betekenis.

In dit hoofdstuk zullen wij ingaan op de netwerktheoretische aspecten van zo'n proces.

In het bijzonder zullen wij onderzoeken, hoe de stromen en spanningen in bepaalde deelnetwerken met de tijd verlopen, waaruit de energieverdeling in het netwerk als functie van de tijd zal volgen. Wij zullen ook, zoals in de voorafgaande hoofdstukken, veel nadruk leggen op systematische rekenprocedures waarmee door gebruikmaking van rekentuigen het mogelijk zal zijn netwerken van grote omvang te berekenen.

Een schakelaar is een fysisch apparaat dat verschillende vormen kan hebben. Een schakelaar kan bestaan uit twee contacten, welke door mechanische verplaatsing in aanraking met elkaar kunnen worden gebracht of, indien zij reeds in aanraking zijn, zodanig kunnen worden verplaatst dat de aanraking wordt verbroken. Een schakelaar kan echter ook uit één of meer transistors bestaan, die zodanig worden bestuurd, dat de schakeling van transistors in twee toestanden kan verkeren: één waarin er een zeer hoge impedantie tussen twee knooppunten van de schakeling bestaat en één waarin tussen diezelfde klemmen een zeer lage impedantie bestaat. Verder kan de werking van een schakelaar berusten op het wel of niet aanwezig zijn van een boog-ontlading tussen twee geleiders, waarbij het regelmechanisme van de boog verschillende vormen kan aannemen.

Al deze apparaten kunnen, wat de essentie van hun werking betreft, worden vervangen door de ideale schakelaar. Dit is een éénpoortelement

fig.65



met de eigenschap dat in een bepaald tijdinterval $[t_1, t_2)$ de impedantie van de tak nul is en in een ander aangrenzend interval $[t_2, t_3)$ of $[t_0, t_1)$ de admittantie nul is. Deze twee mogelijke toestanden van de schakelaar worden aangegeven door de symbolen van fig.65. Van belang is te realiseren dat de schakelaar een niet-energetisch element is. Noch in de geopende, ($i = 0$), noch in de gesloten toestand ($u = 0$) wordt in de schakelaar vermogen opgenomen of afgegeven. Alleen in de overgang van geopende naar gesloten toestand (of omgekeerd) bestaat er onzekerheid over de energie-eigenschappen van de schakelaar. Wij stellen nu dat deze overgang echter plaatsvindt in een oneindig kort tijdsinterval. Dit is natuurlijk een vergaande idealisering van werkelijk fysische apparaten; maar in vele problemen is de idealisering gerechtvaardigd. D.w.z. er ontstaan geen ernstige fouten bij berekeningen, die op deze veronderstelling berusten.

Hoewel er in wezen maar één soort ideale schakelaar is, is het bij schakelproblemen vaak nuttig een onderscheid te maken tussen een schakelaar die van open naar gesloten toestand wordt omgezet en een schakelaar die van gesloten naar open toestand wordt omgezet. In het eerste geval spreken wij van een maakcontact en in het tweede geval van een verbreekcontact. Er zijn ook andere mogelijkheden die echter alle terug te voeren zijn tot een combinatie van deze twee soorten contacten; in het bijzonder betreft dit het wisselcontact, zie fig.66 en fig.67.

fig.66

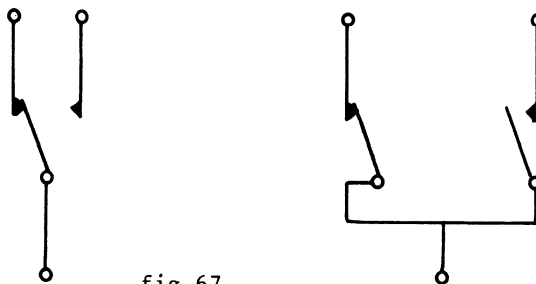
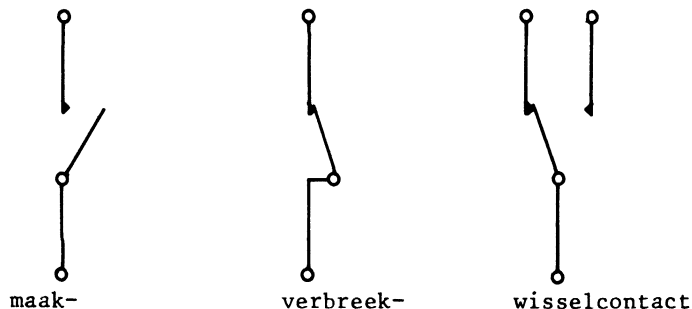


fig.67

De netwerken, die wij in dit college beschouwen, bevatten in het algemeen:

bronnen, weerstanden, spoelen, condensatoren, gekoppelde spoelen, transformatoren en schakelaars.

De methoden die wij zullen ontwikkelen zijn echter zonder veel wijziging toe te passen op netwerken die ook gyratoren en actieve elementen bevatten.

Wij nemen voorlopig aan, dat de sterkte van de bronnen constant is of exponentieel (sinusvormig) met de tijd verandert.

We veronderstellen dat alle schakelaars in een netwerk tegelijk van stand veranderen. Voor het schakelmoment kiezen we steeds het tijdstip $t = 0$. Hieronder wordt verstaan dat de schakelaar zich in de nieuwe toestand op $t = 0$ bevindt, en in de oude toestand voor $t < 0$.

De getekende schema's gelden voor $t < 0$. We zullen eerst aannemen dat een vorige schakelhandeling een oneindig lange tijd geleden heeft plaats-

gevonden, zodat alle eventuele vrije trillingen als gevolg van die schakelhandeling reeds zijn uitgedempt.

In een later stadium kunnen wij deze beperking verruimen.

In een netwerk dat weerstanden bevat, geeft deze veronderstelling i.h.a. geen aanleiding tot problemen. In een verliesvrij netwerk echter, zijn bijzondere maatregelen nodig om te zorgen dat alle vrije trillingen op het moment van schakelen reeds uitgedempt zijn. In elk geval moeten wij eisen dat dit gebeurd is. In de praktijk gaat ieder passief netwerk, opgebouwd uit reële fysische componenten, altijd met energieverliezen gepaard.

Voor het vervolg is van belang het ogenblik vóór het schakelen $t = 0^-$ en het ogenblik vlak na het schakelen $t = 0^+$. Wiskundig gezien is

$$f(0^-) = \lim_{t \uparrow 0} f(t) \text{ en } f(0^+) = \lim_{t \downarrow 0} f(t).$$

VII.2. Eerste orde netwerken.

Wij beschouwen eerst een schakelnetwerkprobleem, dat door een differentiaalvergelijking van de eerste orde wordt beschreven. Zo'n netwerk moet tenminste één condensator of één spoel bevatten.

Voorbeeld:

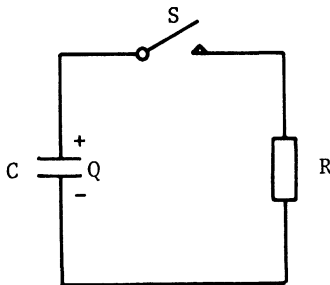


fig.68

De condensator C heeft voor

$t < 0$ de lading Q .

Op $t = 0$ wordt S gesloten.

Hoe is $q(t)$ voor $t \geq 0$?

Voor $t \geq 0$ hebben we:

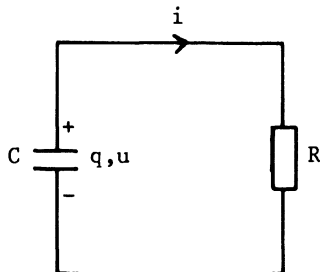


fig.69

$$u = Ri$$

$$\frac{dq}{dt} = -i \text{ (ontlaadstroom)}$$

$$q = Cu,$$

$$\text{dus } RC \frac{dq}{dt} + q = 0.$$

Dit is een homogene differentiaalvergelijking van de eerste orde
De karakteristieke vergelijking vinden we door $\frac{d}{dt}$ door λ te vervangen:

$$RC\lambda + 1 = 0.$$

De wortel is: $\lambda = -\frac{1}{RC}$.

Derhalve is de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$q = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Dezelfde conclusie volgt ook rechtstreeks uit de differentiaalvergelijking door scheiding der variabelen en integratie:

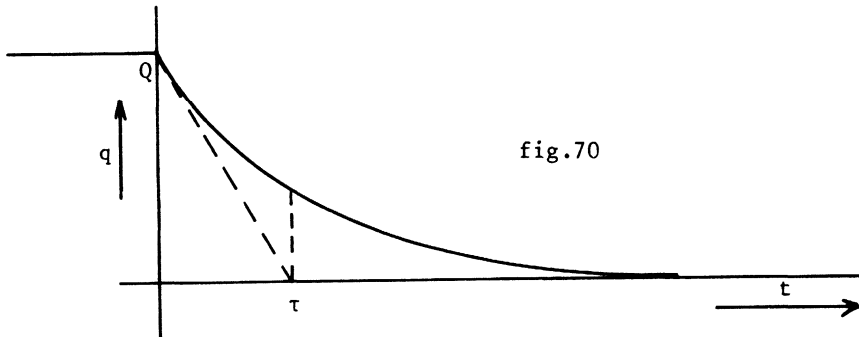
$$\int \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int dt.$$

De constante A wordt bepaald door de beginvoorwaarde:

op $t = 0^+$ is $q = Q$. (Wij nemen hier stilzwijgend aan dat $q(0^+) = q(0^-)$, d.w.z. dat $q(t)$ continu is op $t = 0$). *)

Dus $Q = A$.

Dus de algemene oplossing is $q = Q \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$.



*) Er zijn goede fysische redenen voor deze veronderstelling: de lading op de condensator kan niet veranderen tenzij een stroom tussen de klemmen bestaat. De lading kan niet discontinu op $t = 0$ zijn, tenzij de stroom oneindig is. Een oneindige stroom echter zou een oneindige spanning over de weerstand veroorzaken, hetgeen in strijd met de veronderstelde eindige spanning over de condensator is. In de volgende hoofdstukken zullen wij ingaan op de systematische oplossing van vraagstukken van dit type. Voorlopig zullen wij ons echter beperken tot eenvoudige voorbeelden, waarvan, met enig denkwerk, de continuïteitskwestie op te lossen is.

Verder vinden we $\frac{dq}{dt} = \frac{-Q}{RC} \exp(-\frac{t}{RC})$.

Dus $(\frac{dq}{dt})_{t=0^+} = -\frac{Q}{RC}$.

D.w.z. de raaklijn van de functie in $t = 0$ snijdt de t -as in het punt $\tau = RC$. De grootheid $\tau (=RC)$ heet de tijdconstante van het netwerk (RC - tijd). Op het tijdstip τ is de lading $q = Qe^{-1} \approx 37\%$ van Q . Voor $t = 5\tau$ is $q = Qe^{-5}$, d.w.z. $< 1\%$ van de beginwaarde Q .

Theoretisch zal de condensator nooit geheel ontladen worden; in de praktijk neemt men meestal aan dat de condensator na $t = 5\tau$ ontladen is.

In het voorgaande is als variabele de lading q gekozen.

We hadden ook de stroom i kunnen kiezen.

De berekening verloopt dan als volgt:

$$u = Ri \quad \text{voor } t \geq 0$$

$$\frac{dq}{dt} = -i, \quad \text{dus } \frac{q}{C} = Ri$$

$$q = Cu, \quad \frac{dq}{dt} = RC \frac{di}{dt},$$

$$\text{dus } RC \frac{di}{dt} + i = 0 \quad \text{voor } t \geq 0.$$

We vinden dezelfde karakteristieke vergelijking:

$$RC\lambda + 1 = 0.$$

De reden is dat de karakteristieke vergelijking aangeeft welke waarden van λ mogelijk zijn opdat een oplossing van de differentiaalvergelijking van de vorm $q = Qe^{\lambda t}$, met $Q \neq 0$, kan bestaan.

Daar $i = \frac{dq}{dt}$ geldt dat dezelfde waarden van λ moeten gelden voor een stroomverdeling van de vorm $i = Ue^{\lambda t}$, met als mogelijke uitzondering de waarde $\lambda = 0$.

Deze waarde komt echter overeen met een constante lading op de condensator of een constante stroom door de weerstand, welke toestand in dit probleem niet mogelijk is.

We vinden dus $i = B \exp(-t/RC)$, waarin B een constante is.

De vraag rijst nu hoe groot $i(0^+)$ is.

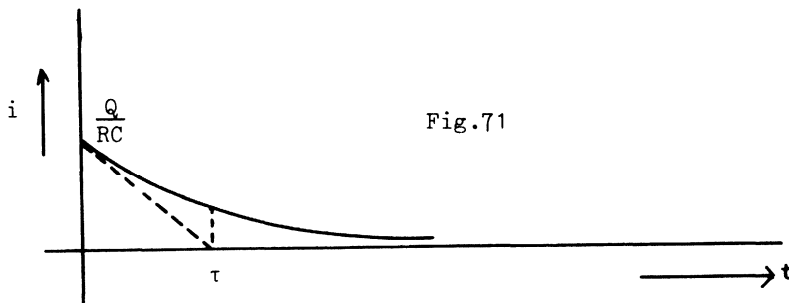
Direct na het schakelen is $U = Ri(0^+)$ als U de beginspanning van de con-

densator is, dus

$$i(0^+) = \frac{U}{R} = \frac{Q}{RC}, \text{ waarbij evenals bij de vorige beschouwing, wij aannemen dat } u(t) \text{ continu op } t = 0 \text{ is.}$$

Dus is $\frac{Q}{RC} = B$,

zodat de oplossing is $i = \frac{Q}{RC} \exp(-t/RC)$, (zie fig.71).



We zien dus dat hoewel de lading q en daarmee de spanning u vlak vóór en nà het schakelen gelijk zijn:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-),$$

de stroom i daarentegen op $t = 0$ een discontinuïteit vertoont.

$$i(0^+) \neq i(0^-).$$

We raken hier één van de kernproblemen van het oplossen van schakelproblemen:

hoe kunnen de waarden van de stromen of spanningen op het tijdstip $t = 0^+$ worden bepaald?

Voor de meeste schakelingen geldt, dat de condensatorspanningen en de spoelstromen continu zijn.

We zullen in de volgende voorbeelden aannemen, dat dit het geval is.

In elk geval zijn de voorbeelden niet zo ingewikkeld, dat de juistheid van de continuïteitsvoorwaarde achteraf niet met eenvoudige redenering te verifiëren is. Uitzonderingen hierop en een stelling komen later aan

de orde.

Voorbeeld: Een netwerk beschreven door een eerste-orde differentiaalvergelijking met een stoorlid.

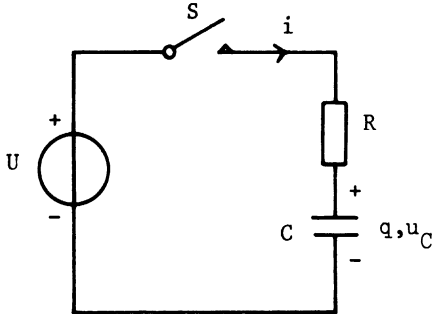


fig.72

De sterkte van de bron is constant.

De condensator is voor $t < 0$ ongeladen.

Op $t = 0$ wordt S gesloten.

We vragen nu naar $q(t)$ voor $t \geq 0$.

Vóór $t \geq 0$ geldt: $U = Ri + u_C$

$$q = Cu_C$$

$$\frac{dq}{dt} = i$$

dus $U = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$. We noemen U het stoorlid.

Stellen we $U = 0$, dan hebben we een homogene differentiaalvergelijking.

De karakteristieke vergelijking is

$$0 = R\lambda + \frac{1}{C}, \quad \text{De wortel is } \lambda = -\frac{1}{RC}.$$

De oplossing van de homogene vergelijking is dus

$$q_h = Ae^{\lambda t}.$$

Stel nu, dat we een "particuliere oplossing" q_p kennen,

$$\text{d.w.z. } U = R \frac{dq_p}{dt} + \frac{q_p}{C}$$

$$\text{dus } 0 = R \frac{d}{dt} (q - q_p) + \frac{1}{C} (q - q_p).$$

$$\text{Stel } q - q_p = q_h \quad \text{of} \quad q = q_h + q_p,$$

d.w.z. de totale oplossing q is de som van de homogene oplossing q_h en een particuliere oplossing q_p .

Een geschikte particuliere oplossing is vaak de toestand voor $t \rightarrow \infty$; d.w.z. de stationaire toestand.

In ons voorbeeld is $q_p = CU$ ($= q(\infty)$).

Immers na lange tijd is de stroom nul en is de condensatorspanning gelijk aan de bronspanning.

We zien gemakkelijk in dat $q = q_p = CU$ aan de algemene differentiaalvergelijking voldoet, want $\frac{dq_p}{dt} = 0$.

De totale oplossing is dus

$$q = Ae^{\lambda t} + CU.$$

De constante A wordt weer bepaald met de beginvoorwaarde:

$$\text{op } t = 0^+ \text{ is } q = 0 = A + CU \rightarrow A = -CU$$

$$q = CU\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right).$$

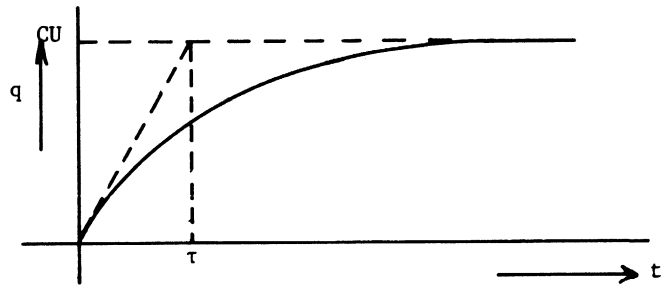
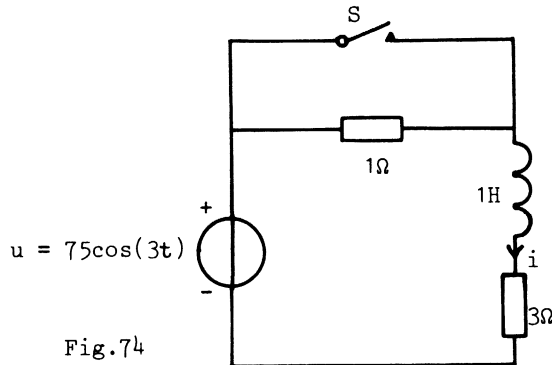


fig.73

Voorbeeld met een sinusvormige bronsterkte:



S heeft een oneindig lange tijd opengestaan.

voor $t > 0$ is $u = (3 + p)i$, $p = \frac{d}{dt}$.

De karakteristieke vergelijking is $0 = \lambda + 3$,

en de eigenfrequentie $\lambda = -3$.

De particuliere oplossing bepalen we met behulp van de complexe rekenwijze.

$$I_p = \frac{75}{3+3j} = \frac{25}{1+j}, \text{ dus } i_p = \frac{25}{\sqrt{2}} \cos(3t - \frac{\pi}{4}).$$

Daarmee wordt

$$i = Ae^{-3t} + \frac{25}{\sqrt{2}} \cos(3t - \frac{\pi}{4}).$$

We bepalen nu de beginvoorwaarde:

Voor $t < 0$ is de vrije trilling uitgedempt, daar S een oneindig lange tijd open is geweest. Derhalve is voor $t < 0$, alleen de particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking van belang.

Deze vinden wij weer m.b.v. de complexe rekenwijze:

$$I = \frac{75}{4+3j}, \text{ dus } i = 15 \cos(3t - \arctan \frac{3}{4}).$$

$$\text{Voor } t = 0 \text{ is } i = 15 \cos(-\arctan \frac{3}{4}),$$

$$\text{dus } i = 12.$$

$$\text{Op } t = 0^+ \text{ is } i = 12 = A + \frac{25}{\sqrt{2}} \cos 45^\circ = A + \frac{25}{2},$$

(aannemende dat i continu is op $t = 0$).

$$\text{Dus } A = -\frac{1}{2},$$

$$\text{en } i = -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{25}{\sqrt{2}} \cos(3t - \frac{\pi}{4}).$$

Vraag: Waarom kan i niet discontinu zijn?

VII.3. De algemene oplossing van een eerste-orde differentiaalvergelijking.

Tot besluit van de behandeling van de berekening van eerste-orde netwerken bespreken we een directe methode ter bepaling van de algemene oplossing.

Stel de differentiaalvergelijking is

$$\dot{x}(t) = fx(t) + gw(t).$$

Stel $x(t) = A(t) e^{ft}$, waarin $A(t)$ te bepalen is.

Ingevuld levert dit op

$$\frac{dA}{dt} e^{ft} + fAe^{ft} = fAe^{ft} + gw$$

dus $\frac{dA}{dt} = gwe^{-ft}$.

Dus $A = \int_0^t gw(\tau) e^{-f\tau} d\tau + A(0)$.

Als $t = 0$, is $x(0) = x(t) = A(t)e^{ft} = A(0)$.

Daarmee wordt de oplossing

$$x(t) = e^{ft} \int_0^t gw(\tau) e^{-f\tau} d\tau + x(0)e^{ft} = \int_0^t gw(\tau) \exp[f(t-\tau)] d\tau + x(0)e^{ft}.$$

Een voordeel van deze oplossingsmethode is, dat ook niet-sinusvormige bronsterkten mogen voorkomen.

Met deze oplossingsvorm wordt duidelijk tot uitdrukking gebracht dat de oplossing uit twee termen bestaat: één die afhankelijk van de bronsterkten is en één die daarvan onafhankelijk is. De eerste term is een particuliere integraal; de tweede term komt overeen met een vrije trilling. Voorbeeld:

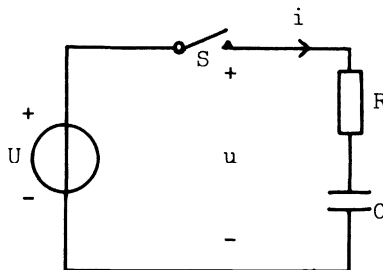


Fig.75

C is ongeladen voor $t < 0$.

De bronsterkte U is constant en $= 1$ V.

S wordt op $t = 0$ gesloten.

Gevraagd $i(t)$.

Het schema wordt voor $t \geq 0$ als in fig.76a:

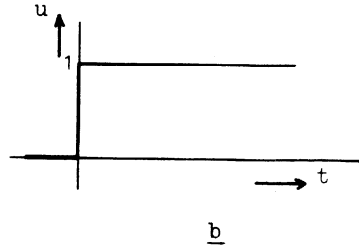
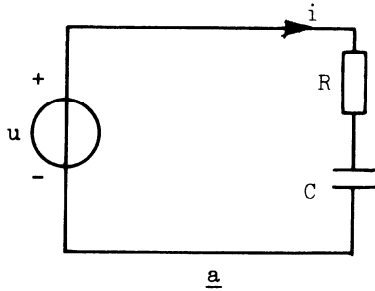


Fig.76

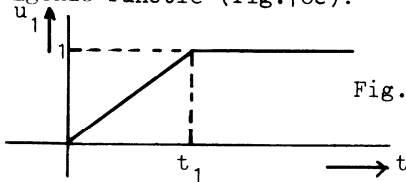
Het verloop van u als functie van de tijd is als in fig.76b.

De differentiaalvergelijking is

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = \frac{1}{R} \frac{du}{dt}$$

Dus $i = i(0) \exp(-t/RC) + \frac{1}{R} \exp(-t/RC) \int_0^t \exp(\tau/RC) \frac{du}{d\tau} d\tau$.

De afgeleide van u is onbegrensd in $t = 0$; daarom vervangen we $u(t)$ door de volgende functie (fig.76c):



$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \text{ voor } t < 0 \\ u_1 &= at \text{ voor } 0 \leq t \leq t_1, \\ u_1 &= 1 \text{ voor } t > t_1, \end{aligned}$$

met $a = \frac{1}{t_1}$

en laten dan t_1 naar 0 naderen.

De stroom die bij deze spanning behoort, wordt met i_1 aangeduid.

Nu is $i_1(0) = 0$, zodat

$$i_1 = \frac{1}{R} \exp(-t/RC) \int_0^{t_1} \exp(\tau/RC) a d\tau$$

$$i_1 = \frac{1}{R} \exp(-t/RC) a RC \exp(\tau/RC) \Big|_0^{t_1}$$

$$i_1 = \exp(-t/RC) \frac{C}{t_1} (\exp t_1/RC - 1), \text{ daar } at_1 = 1.$$

Als $t_1 \rightarrow 0$, nadert $u_1(t)$ tot de oorspronkelijke spanningsfunctie $u(t)$.

Het lijkt aannemelijk dat dan $i_1(t)$ ook tot $i(t)$ nadert.

Deze veronderstelling is inderdaad juist en kan m.b.v. enige analyse worden bewezen. Wij zullen dit echter niet doen in dit stadium maar in het volgende hoofdstuk de oplossing op een andere manier vinden.

$$\text{Dus is } i = \lim_{t_1 \rightarrow 0} i_1 = \exp(-t/RC) C \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{1}{t_1} (\exp t_1/RC - 1) = \frac{1}{R} \exp(-t/RC)$$

$$\text{dus } i = \frac{1}{R} \exp(-t/RC).$$

We hebben hier voor het eerst kennis gemaakt met het begrip "stootfunctie", d.i. de "afgeleide" van een sprong.

VII.4. Kwalitatieve beschouwingen.

Netwerken van de eerste orde komen in de elektrotechniek zo vaak voor, dat het van belang is dat iedere elektrotechnisch ingenieur in staat is, niet alleen de stroom- en spanningsverdeling in zo'n netwerk nauwkeurig te berekenen, maar ook, bij wijze van spreken in een oogwenk, kwalitatief aan te geven wat er in zo'n netwerk gebeurt, zonder dat eerst de complete oplossing wordt bepaald.

Wij weten van § 3, dat in ieder eerste-orde netwerk waar een bron van constante sterkte wordt ingeschakeld, de oplossing van de vorm

$$x(t) = A \exp(-t/\tau) + B$$

moet zijn, zijnde de som van een vrije trilling en een particuliere integraal van de differentiaalvergelijking. De constanten A en B kunnen worden bepaald uit

$$x(0) = A + B$$

$$x(\infty) = B.$$

Vooraf de laatste voorwaarde is gemakkelijk toe te passen. Als $t \rightarrow \infty$, wordt de vrije trilling uitgedempt en zijn alle stromen en spanningen constant. D.w.z. voor $t = \infty$ gedragen de condensatoren zich als open takken en de spoelen zich als kortgesloten takken.

Bij kwalitatieve beschouwingen is het vaak voldoende als wij alleen de polariteiten van de spanningen of de richtingen van de stromen weten, en of er in een spoel een grote of kleine stroom vloeit, of een condensator een grote of kleine spanning heeft.

De bepaling van de toestand op $t = 0$ is bijna altijd moeilijker. Als hulpmiddel weten wij echter dat de stroom door een spoel of de span-

ning over een condensator bijna altijd continu zijn. Wanneer dit niet het geval is, is de spoelspanning, resp. condensatorstroom, oneindig op $t = 0$ en dan moeten wij nagaan of het netwerk zo iets toestaat. Wanneer dit het geval is, zal dit neerkomen op het "kortsluiten" van een spanningsbron of het "openen" van een stroombron.

Topologisch betekent dit, dat er een lus van spanningsbronnen en condensatoren bestaat of een snede van stroombronnen en spoelen.

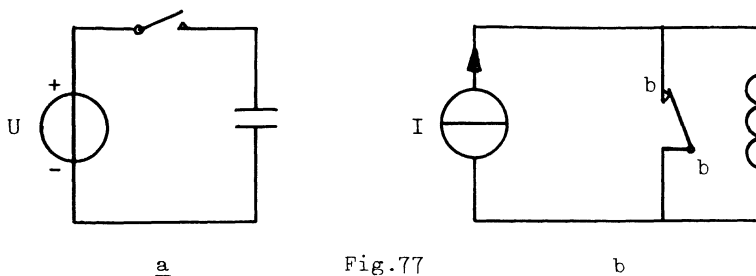


Fig.77

Gaat in het eenvoudige voorbeeld van fig.77a de schakelaar dicht, dan moet de condensatorspanning plotseling de waarde U aannemen. Dit kan alleen als de lading ook plotseling verandert, zodat de stroom dan oneindig is. Eveneens gaat in fig.77b de schakelaar open, dan moet de spoelstroom plotseling de waarde I aannemen. D.w.z. de flux moet plotseling van waarde veranderen, zodat de spanning oneindig wordt.

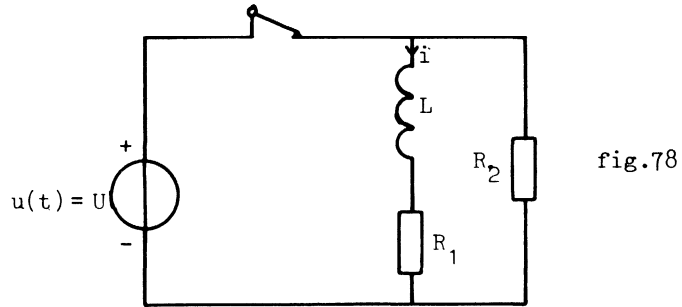
Wij kunnen concluderen dat op $t = 0$ de condensatoren zich als kortsluitingen (spanningsbronnen) en de spoelen zich als open takken (stroombronnen) gedragen.

Men lette goed op het omgekeerde gedrag op $t = 0$ t.o.v. $t = \infty$. Met behulp van deze principes is een schakelvraagstuk van een eerste-orde netwerk teruggebracht tot een gelijkstroom-probleem en het bepalen van één tijdconstante. Dit laatste vinden wij via de karakteristieke vergelijking, welke op haar beurt uit een eenvoudige lus- of snede-vergelijking volgt.

Opgave: Bepaal aan de hand van deze principes kwalitatief het gedrag van alle eerste-orde netwerken in de vraagstukkenverzameling.

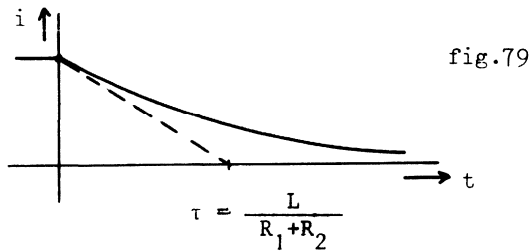
Voorbeelden:

a)



De spoelstroom i heeft een bepaalde waarde, bepaald door U , R_1 en R_2 . Na het openen van de schakelaar zal de spoelstroom exponentieel met de tijd afnemen tot nul.

De functie $i = f(t)$ ziet er dus als volgt uit:



b)

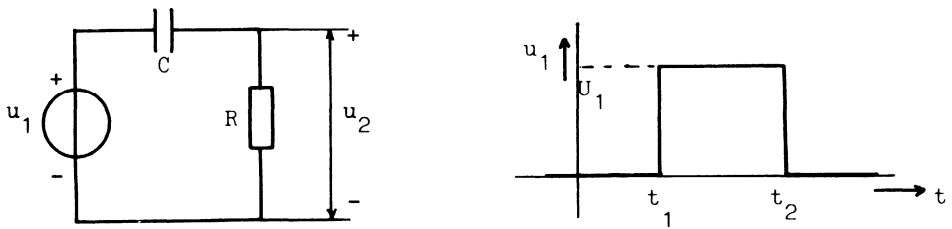


fig.80

Op $t = t_1$ springt u_1 van 0 tot een bepaalde waarde U_1 . Tussen t_1 en t_2 blijft u_1 constant. Op t_2 wordt u_1 weer plotseling nul.

Hoe zal $u_2(t)$ zijn?

Als C aanvankelijk ongeladen is, zal u_2 op t_1 gelijk worden aan U_1 .

Hierna wordt C geladen en neemt de stroom en daarmee u_2 exponentieel met de tijd af.

Op t_2 wordt u_1 weer nul; daarna gaat de (gedeeltelijk) geladen condensator zich ontladen, waardoor de stroom van richting omkeert en daarmee de spanning u_2 .

Het verloop van $u_2(t)$ is als volgt:

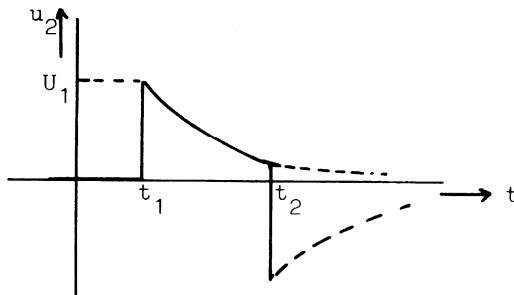


Fig.81

Vraag: Waarom is de sprong in $u_2(t)$ op $t = t_2$ gelijk aan $-U_1$?

Is het produkt RC zeer klein t.o.v. $t_2 - t_1$ dan krijgen we bij benadering:

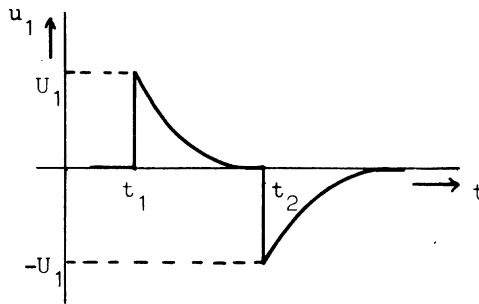


fig.82

c)

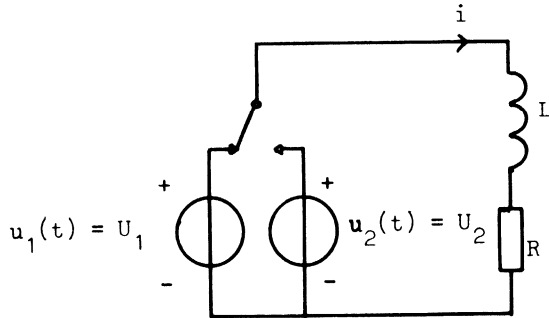


Fig.83

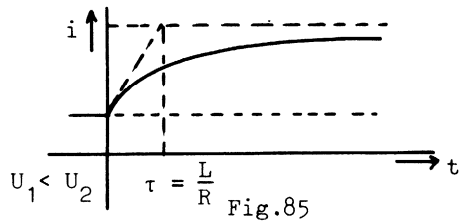
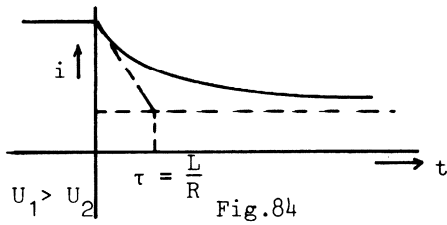
$U_1 \neq U_2$.

De spoelstroom vóór het schakelen is $i = \frac{U_1}{R}$.

Op $t = 0$ wordt de schakelaar omgezet.

De eindwaarde van i (voor $t \rightarrow \infty$) wordt $\frac{U_2}{R}$.

De functie is dus als volgt:



d)

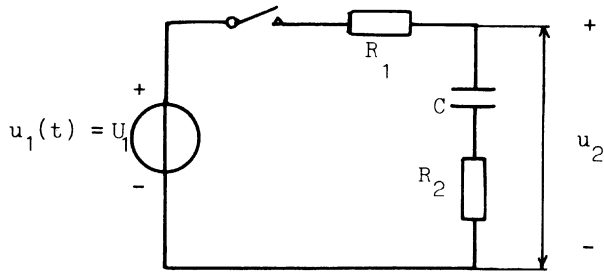


Fig.86

Op $t = 0$ is C ongeladen en wordt de schakelaar gesloten.

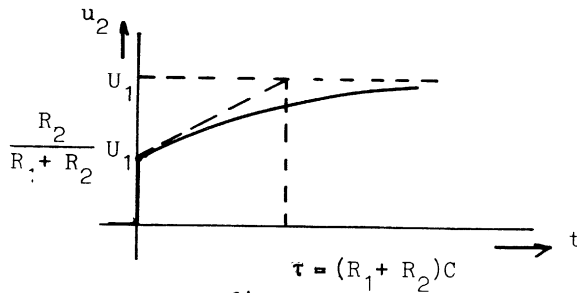
Hoe is $u_2(t)$?

Op $t = 0^+$ is de stroom $\frac{U_1}{R_1 + R_2}$ (de condensatorspanning is continu).

Dus $u_2(0^+) = \frac{U_1}{R_1 + R_2} R_2$.

Voor $t \rightarrow \infty$ is de stroom nul, maar de spanning over C is U_1 .

Het verloop $u_2(t)$ is dus als volgt:



Opgave:

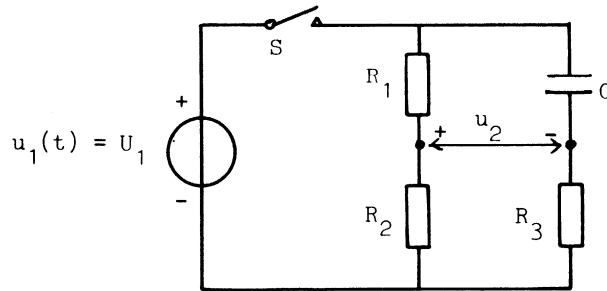


fig.88

Op $t = 0$ is C ongeladen en wordt S gesloten.

Schets $u_2 = f(t)$ voor $t \geq 0$, en bepaal de tijdconstante.

VII.5. Differentiërende en integrerende circuits.

a) Wij beschouwen de schakeling van fig.89.

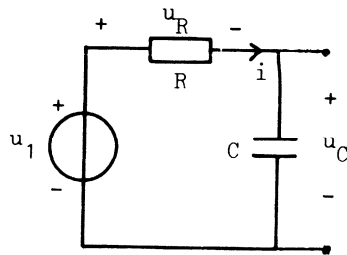


fig.89

Hiervoor geldt:

$$u_1 = Ri + u_C, \quad i = C \frac{d}{dt} u_C,$$

$$\text{dus } u_1 = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Als de tweede term klein is t.o.v. de eerste, d.w.z. als $u_C \ll u_R$, krijgen wij:

$$u_1 \approx RC \frac{du_C}{dt}$$

zodat $u_C \approx \frac{1}{RC} \int u_1 dt$.

Wij zien dus, dat de "uitgangsspanning" u_C de integraal is, van de "ingangsspanning" u_1 .

Opmerking: Daar u_C klein is t.o.v. u_1 moet men versterkers gebruiken.

In de electronica heeft men hiervoor speciale schakelingen ontwikkeld.

b) Beschouw nu fig.90.

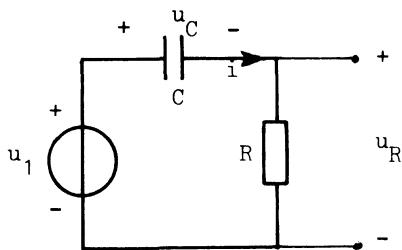


fig.90

Er geldt:

$$u_1 = u_C + u_R,$$

$$u_R = Ri$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{d}{dt} u_1 = \frac{u_R}{RC} + \frac{d}{dt} u_R.$$

Is weer de tweede term klein t.o.v. de eerste, dan ontstaat:

$$u_R \approx RC \frac{d}{dt} u_1.$$

De uitgangsspanning u_R is dus de afgeleide van de ingangsspanning u_1 .

Opgave: onderzoek de duale netwerken.

Er zijn o.a. twee bijzondere gevallen waarvoor de eis $u_C \ll RC \frac{d}{dt} u_C$ in geval (a) en de eis $\frac{d}{dt} u_R \ll \frac{u_R}{RC}$ in geval (b) geldt.

Ten eerste als in geval (a) $u_1(t)$ een stapfunctie is, d.w.z. als $u_1(t) = 0$ voor $t < 0$ en $u_1(t) = U \neq 0$ voor $t \geq 0$, en C is ongeladen op $t = 0$, dan geldt

$$i = \frac{U}{R} e^{-t/\tau}, \text{ met } \tau = RC, \text{ en}$$

$$u_C \ll u_R \text{ als } \frac{U}{RC} \tau(1 - e^{-t/\tau}) \ll U_1 e^{-t/\tau}, \text{ hetgeen geldt als } t \ll \tau.$$

Dus voor tijdintervallen die kort in vergelijking met de tijdconstante zijn, wordt een spanning met de vorm van een stapfunctie inderdaad geïntegreerd.

Bij een sinusfunctie geldt dat $u_C \ll u_R$ als $\frac{1}{\omega C} \ll R$, dus bij hoekfrequenties die groot zijn in vergelijking met de inverse tijdconstante $1/\tau$.

In geval (b) moeten de ongelijkheden worden omgekeerd. De afgeleide van een stapfunctie is oneindig op $t = 0$, zodat u_R nooit een goede benadering van $\frac{du_1}{dt}$ op $t = 0$ kan zijn. Echter voor $t > 0$, is de afgeleide nul en deze waarde wordt door u_R benaderd voor $t \gg \tau$. In het geval van sinusfuncties van de tijd is

$u_R \approx RC \frac{du_1}{dt}$ als $R \ll \frac{1}{\omega C}$, d.w.z. voor hoekfrequenties die veel kleiner dan de inverse tijdconstante zijn.

Opgave: Schets grafieken van alle spanningen, de stroom en condensatorlading van deze schakelingen en verifieer de juistheid van alle beweringen van deze paragraaf. Bepaal of er sprake is van differentiëren of integreren bij spanningsfuncties $u_1(t)$ die (a) langzaam en (b) snel met de tijd variëren.

Geef aan binnen welke grenzen uw beweringen gelden.

VII.6. Tweede-orde netwerken.

Deze bevatten tenminste twee reactieve elementen: twee spoelen, twee condensatoren of één spoel plus één condensator.

De algemene vorm van de differentiaalvergelijking is:

$$a_2 \frac{d^2 i}{dt^2} + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i = f(t)$$

$f(t)$ is het stoorlid en kan ook afgeleiden van de bronsterkten bevatten.

De homogeen gemaakte differentiaalvergelijking is

$$a_2 \frac{d^2 i}{dt^2} + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i = 0.$$

De karakteristieke vergelijking is

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Hierbij onderscheiden we drie gevallen:

- De wortels zijn beide reëel doch ongelijk (aperiodieke trillingen).
- De wortels zijn beide complex (periodieke trillingen).
- De wortels zijn reëel en gelijk (grensgeval).

Voorbeeld:

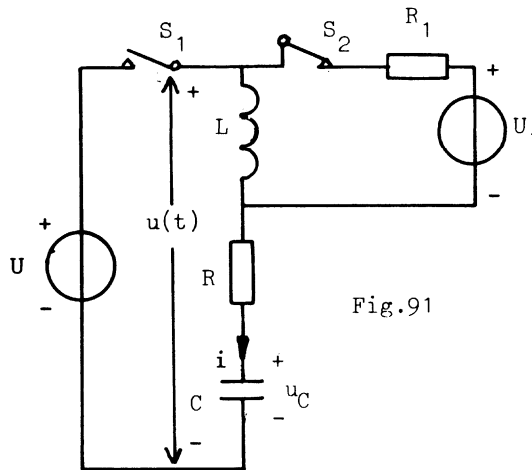


Fig.91

De schakelaar S_1 wordt gesloten en S_2 wordt geopend op $t = 0$.

We vinden $u = u_L + u_R + u_C$ voor $t \geq 0$.

$$\text{Dus } u = L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad \text{of} \quad \frac{du}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i.$$

$$\text{Dus } (p^2 LC + pRC + 1) i = pCu \quad \text{met } p = \frac{d}{dt}.$$

De homogene vergelijking is:

$$(p^2 LC + pRC + 1) i = 0.$$

De karakteristieke vergelijking is: $\lambda^2 LC + \lambda RC + 1 = 0$.

$$\text{De wortels zijn: } \lambda = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}{2LC}.$$

Geval a) Stel $L = 1 \text{ H}$ $R = 5\Omega$ $C = \frac{1}{6} \text{ F}$

dan is de karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

dus $\lambda_1 = -3$ en $\lambda_2 = -2$.

Als $U = 12\text{V}$, dan is een particuliere oplossing voor q

$q_p = CU = 2$,

dus is $q(t) = A e^{-3t} + B e^{-2t} + 2$.

De beginvoorwaarden geven A en B :

Als $u_C(0^-) = 6\text{V}$ en $i(0^-) = 2\text{A}$ dan vinden we:

$$q(0^+) = 1 = A + B + 2, \quad i(0^+) = 2 = (-3A - 2B)\frac{1}{6}$$

waaruit volgt

$$q = 2 - e^{-2t}, \quad u_C = 12 - 6 e^{-2t}, \quad i = 2e^{-2t}.$$

Hierbij hebben wij aangenomen dat de condensatorspanning en de spoelstroom continu zijn.

Geval b) Stel $L = 9\text{H}$ $R = 450\Omega$ $C = 4 \mu\text{F}$ $U = 5\text{V}$,

dan hebben we $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$,

dus $\lambda^2 + 50\lambda + \frac{10^6}{36} = 0$.

$$\lambda = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 - \frac{1}{9} 10^6}}{2} \approx -25 \pm j\frac{990}{6}$$

$$= -25 \pm 165j.$$

$$q \approx A e^{(-25 + 165j)t} + B e^{(-25 - 165j)t} + 20 \cdot 10^{-6}.$$

De beginvoorwaarden geven weer A en B , waarbij de imaginaire termen nul zullen moeten worden, omdat de fysische lading niet complex kan zijn.

Het is i.h.a. gemakkelijker A en B te berekenen als wij eerst eisen dat q reëel moet zijn, d.w.z. $q(t) = q(t)^*$ voor alle t .

Dan is $B = A^*$, zodat

$$q \approx 2 \operatorname{Re} \left[A e^{(-25 + 165j)t} \right] + 20 \cdot 10^{-6} = 2 e^{-25t} \left[\operatorname{Re} A \cos(165t) - \operatorname{Im} A \sin(165t) \right] + 20 \cdot 10^{-6}$$

$$i = 2 \operatorname{Re} \left[A(-25 + 165j) e^{-(25 + 165j)t} \right].$$

Als op $t = 0^+$ geldt: $q = 0$ en $i = 0$,
dan vinden we

$$q = \left[-20 \cdot 10^{-6} \cos(165t) - \frac{1}{33} 10^{-4} \sin(165t) \right] e^{-25t} + 20 \cdot 10^{-6}$$

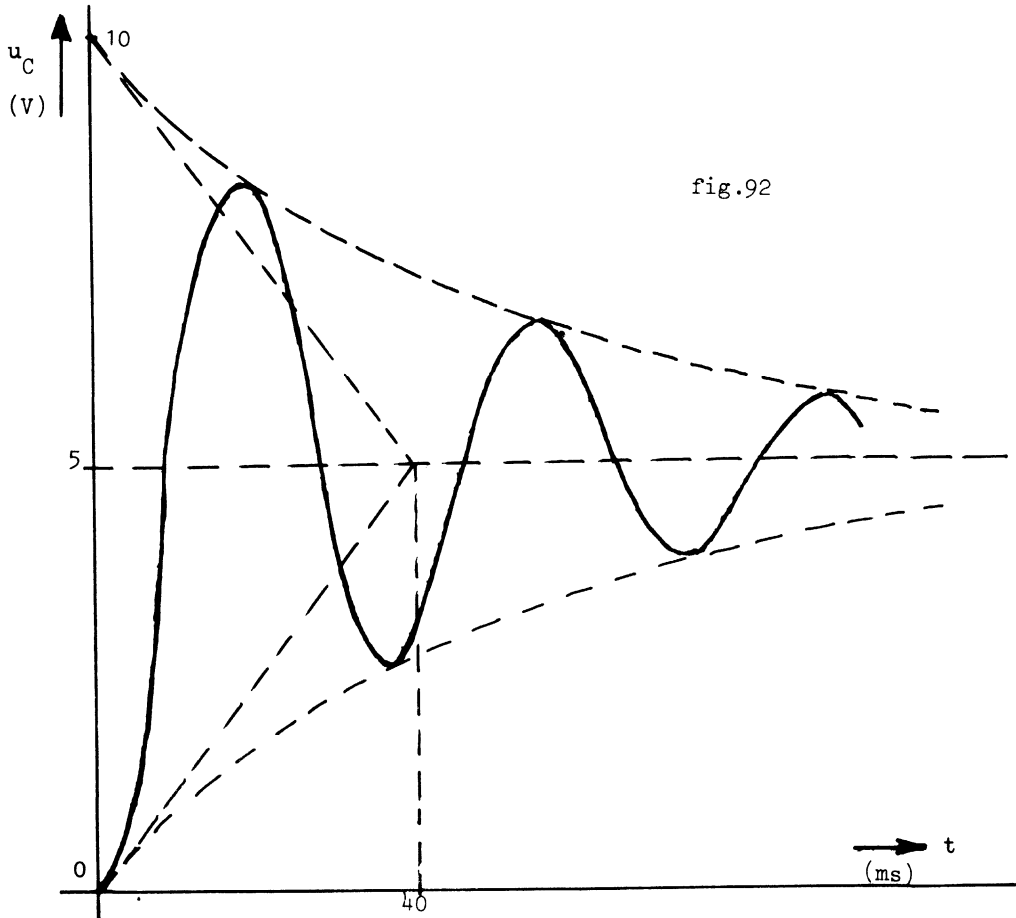
$$\text{dus } u_C = \frac{q}{C} = \left[-5 \cos(165t) - \frac{25}{33} \sin(165t) \right] e^{-25t} + 5$$

$$\text{Dus is } u_C = 5 - 5e^{-25t} \cos[165(t - \epsilon)]$$

$$\text{waarin } \epsilon = \frac{1}{165} \arctan \frac{5}{33} \approx 0,9 \text{ ms.}$$

De periode is $T = 2\pi/\omega \approx 38 \text{ ms}$.

We vinden daarmee de grafiek volgens fig.92.



Geval c) Stel $L = 1$ H $R = 2\Omega$ $C = 1$ F $U = 12$ V

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Er geldt nu niet $q = A e^{-t} + B e^{-t} + 12$,

want dan zou $q = (A + B) e^{-t} + 12$, zodat $A + B$ nu één constante is.

Er moet gesteld worden $q = A e^{-t} + Bt e^{-t} + 12$.

De oplossing bevat dus een term met de factor t . (Zie hiervoor het college differentiaalvergelijkingen).

Deze vorm van de oplossing kan ook worden afgeleid als een limiet geval van ieder van de twee voorgaande gevallen.

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} (A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}) = \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \{ e^{\lambda_1 t} [A + B e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}] \}$$

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \{ e^{\lambda_1 t} [A + B + B(\lambda_2 - \lambda_1)t] \}$$

Hiervoor is nodig dat $A + B$ begrensd blijft terwijl $B = 0$ ($\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$).

Een gedetailleerde analyse toont aan dat inderdaad aan deze voorwaarde voldaan wordt.

De oplossingsvorm kan ook gegeven worden voor twee eerste-orde differentiaalvergelijkingen, die met de gegeven tweede-orde differentiaalvergelijkingen equivalent zijn:

$$\frac{dx}{dt} + x = \frac{du}{dt}$$

$$x = \frac{di}{dt} + i.$$

Opmerking:

Als $q = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} + f(t)$, waarin $f(t)$ een particuliere integraal is, kunnen A en B worden bepaald als $q(0)$ en $(\frac{dq}{dt})_{t=0}$ bekend zijn.

We zouden A en B ook kunnen vinden als $q(t_1)$ en $q(t_2)$ bekend waren, d.w.z. de lading op twee verschillende tijdstippen.

Bij serieschakeling van spoel en condensator zijn toevallig

$q(0)$ en $i(0) = \left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0}$ bekend.

In het algemeen echter is voor een tweede-orde systeem de eerste afgeleide op $t = 0$ niet gemakkelijk te vinden. Wij zullen dit illustreren met het volgende voorbeeld:

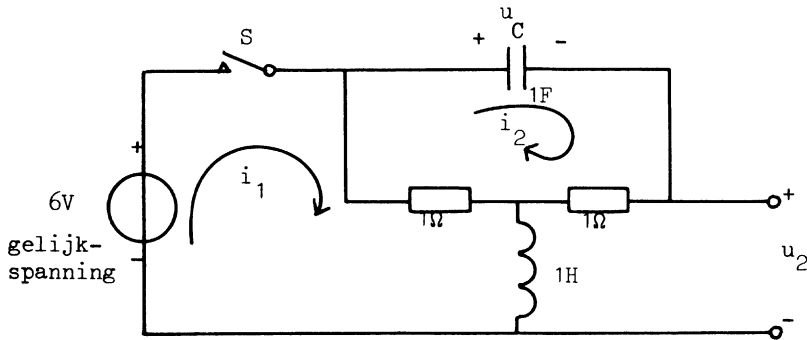


fig.93

Als de schakelaar gesloten wordt, dan gelden de volgende maasvergelijkingen.

$$6 = (1 + p)i_1 - i_2 \quad \text{met } p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}$$

$$0 = -i_1 + 2i_2 + u_C.$$

Als de tweede vergelijking eenmaal gedifferentieerd wordt, dan volgt

$$0 = -pi_1 + (2p + 1)i_2.$$

De karakteristieke vergelijking van de vrije trillingen volgt als wij in bovenstaande vergelijkingen p vervangen door λ en de bronsterkte door nul vervangen. Er volgt met $i = I e^{\lambda t}$:

$$\begin{bmatrix} 1 + \lambda & -1 \\ -\lambda & 2\lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Deze vergelijkingen hebben een niet-triviale oplossing, dan en slechts dan als de determinant van de coëfficiëntmatrix van de stroomvector nul is.

$$\text{D.w.z. } 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Ondanks het feit dat bij de afleiding eenmaal gedifferentieerd is, is deze vergelijking toch de juiste karakteristieke vergelijking, daar de orde van het netwerk twee is.

De wortels zijn: $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}j$. De algemene oplossing is dus:

$$u_2 = e^{-\frac{1}{2}t} (\text{Acos}\frac{1}{2}t + \text{Bsin}\frac{1}{2}t).$$

De particuliere oplossing $u_2^{(\infty)}$ is nul, omdat $u_2 \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$. Bekend zijn de beginvoorwaarden, d.w.z. $u_C(0^+)$ en $i_1(0^+)$.

Om A en B te bepalen zijn echter $u_2(0^+)$ en $\left(\frac{du_2}{dt}\right)_{t=0}$ nodig.

Voor dit eenvoudige netwerk zijn de gevraagde waarden nog wel te vinden, voor ingewikkelder netwerken is een systematischer aanpak noodzakelijk.

Wij werken het voorbeeld nu verder uit met

$$u_C(0^+) = 4V \text{ en } i_1(0^+) = 8 \text{ A.}$$

(Wij laten buiten beschouwing welke voorgeschiedenis van de schakeling en welke hulpcircuits nodig zijn om deze voorwaarden te realiseren).

$$\text{Nu geldt: } 6 = u_C + u_2,$$

$$\text{zodat } u_2(0^+) = 6 - 4 = 2.$$

Gedifferentieerd levert de eerste vergelijking op:

$$0 = \frac{du_C}{dt} + \frac{du_2}{dt}.$$

Verder is $\frac{du_C}{dt} = i_2$, zodat $\left(\frac{du_2}{dt}\right)_{0^+} = -i_2(0^+)$.

Uit de maasvergelijkingen vinden we op $t = 0^+$:

$$\begin{aligned} i_1(0^+) &= 8 \quad \text{en} \\ -4 &= 2i_2(0^+) - i_1(0^+), \end{aligned}$$

$$\text{zodat } i_2(0^+) = 2$$

$$\text{en dus } \left(\frac{du_2}{dt}\right)_{0^+} = -2$$

We vinden na invullen van $t = 0^+$: $2 = A$.

Door differentiëren van de algemene oplossing vinden we:

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}(A\cos\frac{1}{2}t + B\sin\frac{1}{2}t) + e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}t).$$

Vullen we weer $t = 0^+$ in, dan krijgen we: $-2 = -\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ dus $B = -2$.

$$\text{Dus } u_2 = 2e^{-\frac{1}{2}t}(\cos\frac{1}{2}t - \sin\frac{1}{2}t).$$

De snelste manier om de karakteristieke vergelijking te bepalen, is meestal die volgens de immittantiemethode.

Beschouw in het vorige voorbeeld de impedantie $Z(\lambda)$ rechts van de spanningsbron:

$$Z = \frac{\frac{1}{\lambda} + 1}{\frac{1}{\lambda} + 2} + \lambda = \frac{\lambda + 1}{2\lambda + 1} + \lambda = \frac{2\lambda^2 + 2\lambda + 1}{2\lambda + 1} = \frac{U}{I}.$$

Voor $U = 0$ is de teller van Z nul:

$$2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Let op! Men moet steeds nagaan of de graad van de gevonden karakteristieke vergelijking inderdaad gelijk is aan de orde van het netwerk !!!

In het onderhavige probleem is dit wel het geval, zodat de gevonden vergelijking inderdaad de karakteristieke vergelijking is.

Ter illustratie van dit laatste probleem beschouwen wij het volgende voorbeeld:

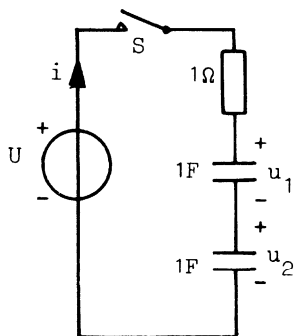


fig.94

$$\frac{U}{I} = Z = 1 + \frac{2}{\lambda} = \frac{\lambda + 2}{\lambda}$$

$$U \equiv 0 \rightarrow \lambda + 2 = 0.$$

We vinden hier een karakteristieke vergelijking van de eerste graad, maar de orde van het netwerk is twee!

De juiste karakteristieke vergelijking is $\lambda(\lambda + 2) = 0$, zoals gemakkelijk met de theorie van hoofdstuk IV kan worden berekend. In eenvoudige gevallen kan men meestal de ontbrekende factoren van de karakteristieke vergelijking door fysische redenering vinden. In het voorbeeld is gemakkelijk in te zien dat een mogelijke vrije trilling dié is, waarin de condensatoren gelijke constante ladingen hebben maar van zodanige polariteiten dat $u_1 = -u_2$.

VII.7. Continuïteitsstelling.

Gegeven een netwerk bestaande uit weerstanden, spoelen, condensatoren, schakelaars en verder uit bronnen, waarvan de sterkte als functie van de tijd continu is. Maak alle bronsterkten nul. Dan geldt:

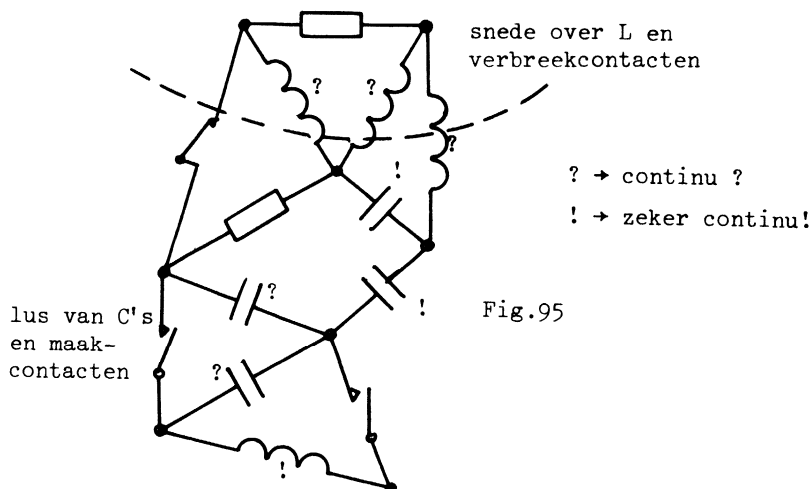
De stromen in de spoelen, die geen snede vormen met verbreekcontacten zijn continu.

De spanningen over de condensatoren, die geen lus vormen met maakcontacten zijn continu.

Het bewijs van deze stelling zal in een later stadium worden gegeven. *)

Opmerking: Hieruit volgt niet, dat we met zekerheid kunnen zeggen dat een spoelstroom of condensatorspanning, die niet aan de genoemde voorwaarden voldoet, discontinu is!

Ter illustratie fig.95, waarin alle bronsterkten nul zijn gemaakt.

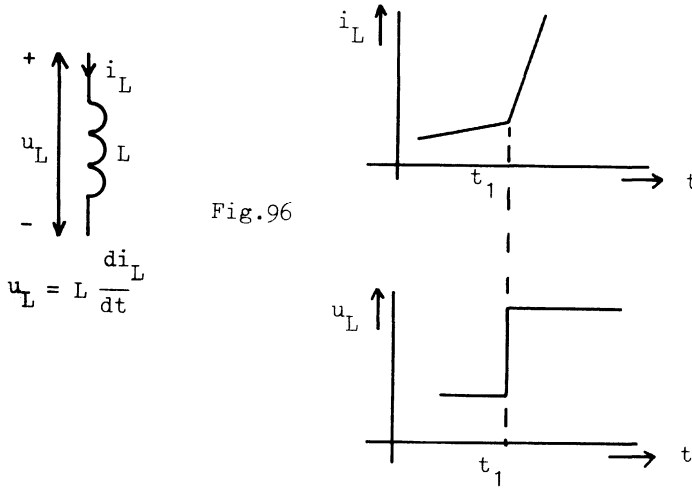


*) Zie blz.177.

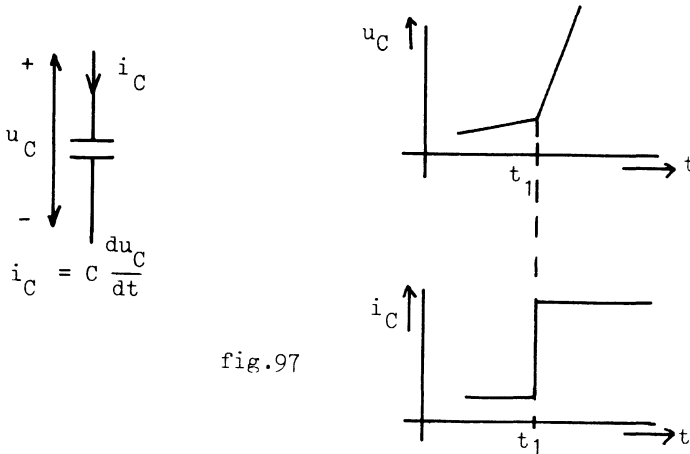
De continuïteit van de met ? aangegeven condensatorspanningen en spoelstromen kan alleen worden bepaald wanneer de bronsterkten en de voor- geschiedenis van het netwerk bekend zijn. Hiervoor is nodig een gedetail- leerde analyse van het netwerk. Toch zijn in vele gevallen de eenvoudige topologische criteria voldoende om de continuïteit te bepalen.

Opgave: Onderzoek de continuïteit van alle spoelstromen en de condensator- spanningen van vorige voorbeelden.

Opmerking: Als een spoelstroom continu is, behoeft de spanning niet nood- zakelijk continu te zijn:



Bij een condensator hebben we:



VII.8. De stootfunctie.

Een discontinue spoelstroom heeft een oneindige spoelspanning tot gevolg:

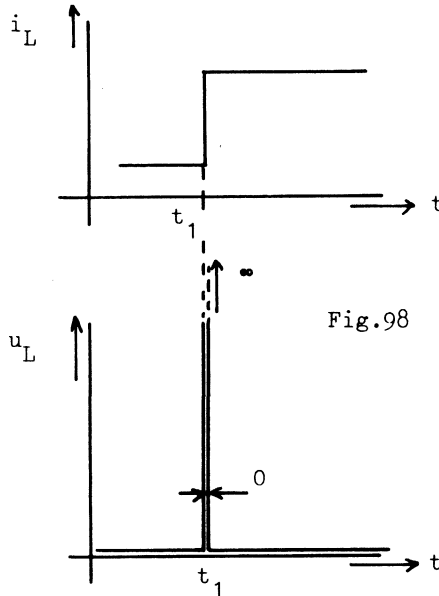


Fig.98

Een discontinue condensatorspanning (het duale geval) heeft een oneindige condensatorstroom tot gevolg. Er ontstaat een z.g. stootfunctie. Dit is geen functie in de gewone betekenis maar een voorbeeld van een gegeneraliseerde functie. In wezen ontstaat deze gegeneraliseerde functie uit de **limiet** van een rij van gewone functies die aan bepaalde voorwaarden voldoen. Het een en ander wordt geïllustreerd aan de hand van het volgende netwerk-vraagstuk.

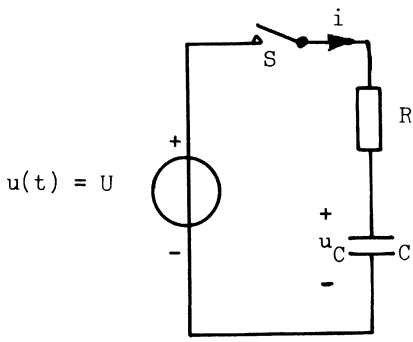


fig.99

Stel $u_C(0^+) = 0$.

De karakteristieke vergelijking is

$$\lambda RC + 1 = 0.$$

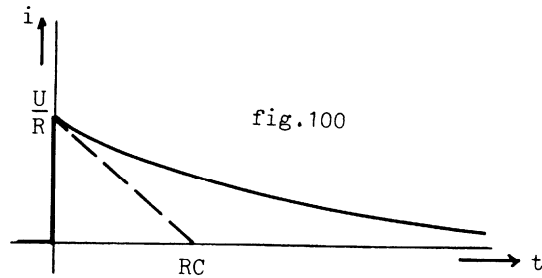
Dus $\lambda = -\frac{1}{RC}$.

Dus $i = A e^{-\frac{t}{RC}}$; de particuliere oplossing $i(\infty) = 0$.

Op $t = 0^+$ is $i = \frac{U}{R} = A$,

dus $i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$.

(fig.99)



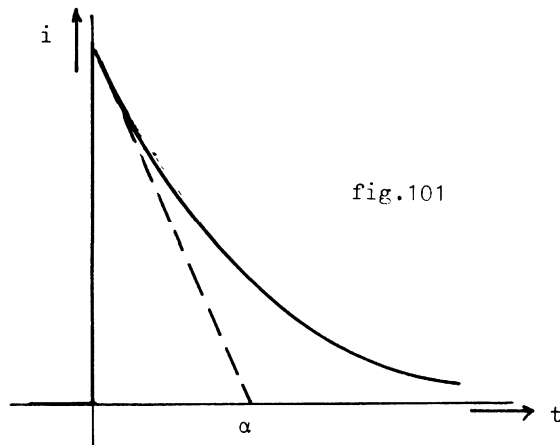
Het oppervlak van de figuur is

$$Q = \int_0^{\infty} i dt = \int_0^{\infty} \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \cdot RC \Big|_0^{\infty}$$

$$Q = CU.$$

De oppervlakte is dus onafhankelijk van R (!).

Maken we R kleiner, dan wordt $\frac{U}{R}$ groter, maar de oppervlakte blijft $Q = CU$.



Voor $R \rightarrow 0$ is $\frac{U}{R} \rightarrow \infty$.

Wij kunnen dan zeggen dat de stroom $i = CU \frac{1}{RC} \exp(-t/RC) = CU a e^{-at}$ met $a = \frac{1}{RC}$ tot nul nadert als $t \neq 0$ en onbegrensd is als $t = 0$, wanneer $R \rightarrow 0$.

Wij voeren nu de δ -functie (stootfunctie) in, welke geen gewone functie is in de zin dat met elke waarde van t er een vaste waarde van de

functie correspondeert, maar een symbool voor een bepaalde limieteigenschap van een rij van functies.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) h(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, a) h(t) dt = h(0), \quad (1)$$

waarin $h(t)$ een willekeurige functie is, die aan de eisen voldoet: de integralen

$$\int_{-\infty}^{-\eta} f(t, a) h(t) dt, \quad \int_{\eta}^{\infty} f(t, a) h(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{als } a \rightarrow \infty \text{ voor elke } \eta > 0, \quad (2)$$

$h(t)$ is continu op $t = 0$,

$$\text{en } f(t, a) = a e^{-at}, \quad a > 0, \quad t \geq 0. \\ = 0, \quad t < 0.$$

Om te bewijzen dat de beweerde eigenschap (1) geldt, beschouwen wij

$$M = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t, a) h(t) dt - h(0) \right| \\ = \left| \int_0^{\infty} a e^{-at} [h(t) - h(0)] dt \right|,$$

daar $f(t, a) = 0$ voor $t < 0$ en $\int_0^{\infty} a e^{-at} dt = 1$.

Daar $h(t)$ continu op $t = 0$ is, bestaat er een $\eta > 0$, zodanig dat voor iedere $\epsilon > 0$, $|h(t) - h(0)| < \epsilon$ voor alle $|t| < \eta$.

$$\text{Dan is } M \leq \left| \int_0^{\eta} [h(t) - h(0)] a e^{-at} dt \right| + \left| \int_{\eta}^{\infty} [h(t) - h(0)] a e^{-at} dt \right| \\ \leq \epsilon(1 - e^{-a\eta}) + \left| \int_{\eta}^{\infty} h(t) a e^{-at} dt \right| + h(0) e^{-a\eta}.$$

Daar ϵ willekeurig klein kan zijn, geldt dat $M \rightarrow 0$ als $a \rightarrow \infty$ q.e.d.

Een bijzonder geval is $h(t) = 1$. Dan resulteert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Het is ook gemakkelijk met dezelfde bewijs-techniek aan te tonen dat

$$\int_{-t_1}^{t_2} \delta(t) h(t) dt = h(0) \quad \text{voor alle } t_1, t_2 > 0.$$

Behalve de hier gebruikte functie kunnen allerlei andere functies voor

$f(t,a)$ worden gebruikt, b.v.

$$\frac{a}{\pi(1+a^2t^2)}, \quad \frac{a}{\sqrt{\pi}} \exp(-a^2t^2), \quad \begin{array}{l} g(t,a) = \frac{1}{2}a, \quad |t| \leq \frac{1}{a} \\ g(t,a) = 0 \quad |t| > \frac{1}{a}. \end{array}$$

Al deze functies voldoen aan de betrekking (1), als de functie $h(t)$ aan de eisen (2) voldoen.

Als $|h(t)| < Kt^2$, $K > 0$ als $t \rightarrow \infty$ en $h(t)$ continu op $t = 0$ is, voldoet $h(t)$ aan de eisen (2) voor de keuze van de vier functies $f(t,a)$ die wij genoemd hebben.

Het is vanwege het feit dat $\delta(t)$ een soort limiet is van functies van zeer uiteenlopende vorm dat $\delta(t)$ een gegeneraliseerde functie wordt genoemd.

Men lette goed dat geen betekenis kan worden gegeven aan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{a \rightarrow \infty} [f(t,a) h(t)] dt.$$

Eerst moet de integraal worden berekend en dan pas mag tot de limiet worden overgegaan.

In EN.I, § 8.7.1. e.v. is er iets geschreven over de betekenis van "discontinuïteiten" in fysische systemen. Een "discontinue"functie die een fysisch proces beschrijft, kunnen wij uitsluitend als een limiet geval van een rij continue functies beschouwen. In de discontinuïteit zelf kunnen wij niets zeggen over het fysisch proces daar, òf het proces zo snel verloopt dat wij het niet met onze meetinstrumenten kunnen volgen òf de kleine parasitaire grootheden (b.v. reactanties) die het proces bepalen te onzeker bekend zijn of niet goed reproduceerbaar zijn. Fysisch bezien kunnen wij alleen iets zeggen over de toestand voor het begin en na het einde van zo'n snel lopend proces.

De theorie der gegeneraliseerde functies is gewoon het wiskundig analogon van deze fysische ideeën. Alleen is het interval van onzekerheid van het preciese gedrag van de functie teruggebracht tot een interval van oneindig kleine grootte.

Als wij in het vervolg praten over stootfuncties $\delta(t - t_0)$ of andere gegeneraliseerde functies in verband met fysische grootheden zoals

spanning of stroom, moeten wij bedenken dat in een fysisch netwerk alles continu en eindig blijft, maar op het tijdstip $t = t_0$ bepaalde grootheden zeer groot of zeer snel veranderend kunnen zijn.

In de tot dusverre beschouwde oplossingsmethoden van schakelvraagstukken hebben wij steeds $t = 0^+$ als de ondergrens van het tijdinterval genomen, d.w.z. nadat het schakelen voltooid was. Voor het tijdstip $t = 0$ moeten wij nu soms een stootfunctie aan de oplossing toevoegen.

Een stootstroom ontstaat als er een lus is van spanningsbronnen, maakcontacten en condensatoren en de som der condensatorspanningen vóór het schakelen ongelijk is aan de som der bronspanningen. Een spanningsstoot ontstaat voor het duale geval.

Voorbeeld:

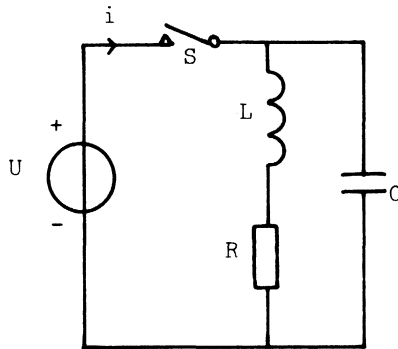


fig.102

$$i_L(0^-) = 0$$

$$u_C(0^-) = 0$$

Voor $t > 0$ is het netwerk van fig.102 van de eerste orde (Zie fig.103).

De karakteristieke vergelijking is

$$(\lambda L + R) i = 0.$$

$$\text{dus } \lambda = -\frac{R}{L}.$$

Wij vinden:

$$i = A e^{\lambda t} + \frac{U}{R} + CU \delta(t).$$

Opgave:

Ga de herkomst van alle termen van i na.

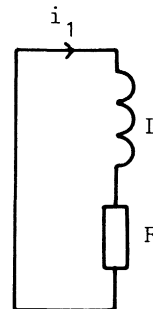


fig.103

VII.9. Hogere orde netwerken.

Zoals gebleken is bij tweede-orde netwerken, is het bepalen van de beginvoorwaarden de moeilijkste stap. Voor derde en hogere orde netwerken kan het vinden van de juiste beginvoorwaarden van een differentiaalvergelijking van de orde n erg omslachtig worden.

Een algemene methode, waarbij de beginstromen in de spoelen en de beginspanningen over de condensatoren rechtstreeks gebruikt kunnen worden i.p.v. hun afgeleiden, verdient daarom de voorkeur.

De toestandsvergelijkingen bieden hier uitkomst. Men berekent dan eerst de spoelstromen en de condensatorspanningen op $t = 0^-$. Zijn deze grootheden continu (te onderzoeken met de continuïteitsstelling), dan zijn de waarden op $t = 0^+$ bekend.

Vervolgens doen wij alsof het netwerk op $t = 0$ ontstaat, d.w.z. alle bronnen worden dan ingeschakeld, terwijl in het netwerk alle schakelaars (waarvan wij veronderstellen, dat zij alle gelijktijdig op $t = 0$ van stand veranderen) de stand $n\grave{a}$ het schakelen krijgen. De graph is dus die behorend bij het netwerk $n\grave{a}$ het schakelen. Met de methode van hoofdstuk VI kunnen dan de algemene toestandsvergelijkingen in matrixvorm gevonden worden.

De op deze wijze gevonden toestandsvergelijkingen leiden dan samen met de beginvoorwaarden tot de oplossing. Een rechtstreekse oplossing moet tot een later studiejaar worden uitgesteld. In het volgende hoofdstuk behandelen wij de methode van de Laplace-transformatie, waarmee de oplossing van netwerkproblemen waarin de bronsterkten een eenvoudige vorm hebben, mogelijk is.

Een voordeel van de methode van de Laplace-transformatie is dat er automatisch rekening gehouden wordt met de eventuele aanwezigheid van δ -functies. Dit feit maakt het voordelig met dezelfde graph van het netwerk voor en na het schakelen te werken, in tegenstelling tot wat hierboven is vermeld. Er zijn echter nadelen aan de methode van de Laplace-transformatie verbonden, welke wij aan het einde van het volgende hoofdstuk zullen vermelden.

VIII. HET ONDERZOEK VAN SCHAKELVERSCHIJNSELEN MET BEHULP VAN DE TRANSFORMATIE VAN LAPLACE.

VIII.1. Inleiding.

Bij het onderzoek van schakelproblemen was het tot dusver steeds noodzakelijk, bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen die het systeem beschrijven, te beschikken over de condensatorspanningen en de spoelstromen op het tijdstip vlak na het schakelen ($t = 0^+$).

Vaak zijn echter deze spanningen en stromen in eerste instantie bekend op het tijdstip vlak vóór het schakelen ($t = 0^-$), zodat een onderzoek naar de waarden op $t = 0^+$ nodig was. Hoewel dit onderzoek voor eerste en tweede orde-netwerken wel uit te voeren is, nemen bij hogere orde-netwerken de moeilijkheden snel met de orde toe.

Weliswaar kan men in vele gevallen de beginwaarden m.b.v. de continuïteitsstelling bepalen, maar daartegenover zijn er andere gevallen waar de continuïteit van de stromen en spanningen niet op eenvoudige wijze te bewijzen is. Verder moet als sommige stromen of spanningen inderdaad discontinu zijn, de aard en de grootte van de discontinuïteit worden bepaald. En tenslotte moet de continuïteitsstelling zelf nog worden bewezen.

Deze moeilijkheden kunnen worden ondervangen, indien wij gebruik maken van de transformatie van Laplace. Zodoende is het mogelijk direct in elke tak-, lus- of snedevergelijking de beginwaarden (op $t = 0^-$) bij te voegen, zodat zelfs het bepalen van de waarden op $t = 0^+$ van eerste of hogere afgeleiden niet nodig is.

Bovendien blijkt deze methode zich bijzonder te lenen voor de berekening van verschijnselen als stoten en complexe resonantie.

Tenslotte blijkt een apart onderzoek naar de particuliere integraal niet meer nodig.

Een didactisch nadeel van deze methode is, dat de oplossing van schakelproblemen kan ontaarden in een mathematische routine, waarbij het gevaar bestaat, dat het fysisch inzicht onvoldoende ontwikkeld wordt. Om deze reden werd dan ook eerst de directe oplossingsmethode behandeld. Andere nadelen, verbonden aan de bruikbaarheid van deze methode, zullen aan het einde van dit hoofdstuk worden besproken.

VIII.2. Definitie.

Uit een functie $f(t)$ van een reële variabele wordt een andere functie $F(s)$ van een complexe variabele afgeleid, gedefinieerd door de z.g. Laplace-integraal

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \text{met } s \text{ complex.}$$

Wij noemen $F(s)$ de laplace-getransformeerde van $f(t)$.

We zullen steeds een kleine letter gebruiken voor functies in het tijdgebied en grote letters voor functies in het s -gebied.

Onmiddellijk doet zich de vraag voor of zo'n integraal convergeert.

Met $s = \alpha + j\beta$ (α, β reëel), is

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha t} \cos \beta t f(t) dt - j \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha t} \sin \beta t f(t) dt.$$

Voldoende voorwaarden dat deze beide integralen convergeren zijn dat $f(t)$ integreerbaar over een eindig tijdinterval $[0, T]$, $T > 0$ is en dat een α_0 bestaat zodanig dat $\exp(-\alpha_0 t) f(t) \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$. Dit is wel het geval voor praktisch alle functies waarmee wij in de elektrotechniek te maken hebben. Dan bestaat $F(s)$ voor alle $\text{Re}(s) > \alpha_0$.

Onder dezelfde omstandigheden kan worden aangetoond dat

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad \alpha > \alpha_0, \quad t \geq 0.$$

De integraal is als volgt te interpreteren. Stel $s = \alpha + j\beta$; dan is

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha + j\beta) \exp[(\alpha + j\beta)t] d\beta.$$

De integrand kan in reële en imaginaire delen worden gesplitst waarna de integraal (in principe) van ieder deel kan worden bepaald.

Daar $f(t)$ reëel is, levert alleen de integraal van het imaginaire deel van de integrand een bijdrage op.

In de praktijk wordt de integraal op een heel andere wijze berekend, waarvoor men zij verwezen naar de derdejaars colleges "functietheorie" en "integraaltransformaties in de elektrotechniek". In dit stadium van de studie is het voldoende te weten dat:

mits s ligt in het gebied van het complexe vlak waarvoor de definitie-integraal $F(s)$ convergeert, de overgang $f(t) \leftrightarrow F(s)$ van links naar rechts

en van rechts naar links eenduidig *) is. Wij zullen voortaan deze notatie gebruiken om een transformatie-paar aan te duiden.

VIII.3. De sprong-, de puls- en de stootfunctie.

a) De sprongfunctie $\epsilon(t)$ van Heaviside is gedefinieerd als:

$$\epsilon(t) = 0 \quad \text{voor } t < 0$$

$$\epsilon(t) = 1 \quad \text{voor } t > 0$$

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2} \quad \text{voor } t = 0.$$

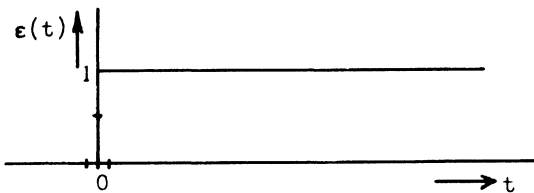


Fig.104

Op $t = 0^-$ is $\epsilon(t) = 0$, dus $\epsilon(0^-) = 0$, en verder is $\epsilon(0^+) = 1$.

We vinden voor de laplacegetransformeerde functie:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{als } \text{Re}(s) > 0.$$

Hierbij moet $\text{Re}(s) > 0$ daar anders de integraal niet convergeert;

verder geldt $A \epsilon(t) \leftrightarrow \frac{A}{s}$.

b) De pulsfunctie $\delta(t, \Delta)$ is gedefinieerd als:

$$\delta(t, \Delta) = \frac{1}{\Delta} \quad \text{voor } 0 \leq t \leq \Delta$$

$$\delta(t, \Delta) = 0 \quad \text{voor } t > \Delta,$$

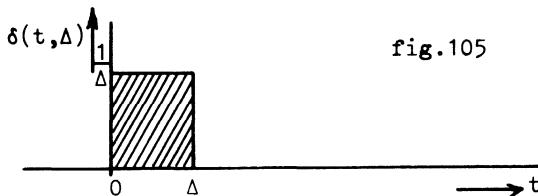


fig.105

*) Dit is wel het geval voor "normale" functies. Echter hebben de functies: $\epsilon(t)$ en $\eta(t) = 1$ voor $t \geq 0$, $\eta(t) = 0$ voor $t < 0$, dezelfde laplacetransformaties. In het algemeen geldt $f(t) \leftrightarrow F(s) \leftrightarrow g(t)$ als $f(t) \neq g(t)$ maar $\int_0^{\infty} |f(t) - g(t)| dt = 0$.

$$\begin{aligned} \text{We vinden } F(s) &= \int_0^- \infty e^{-st} \delta(t, \Delta) dt = \int_0^- \Delta e^{-st} \frac{1}{\Delta} dt \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^-^{\Delta} = \frac{1}{\Delta s} (1 - e^{-s\Delta}). \end{aligned}$$

We merken nog op, dat de oppervlakte 1 is, onafhankelijk van Δ .

c) De stootfunctie $\delta(t)$.

Volgens de discussie in § VII.8. kan de pulsfunctie, met Δ als parameter, dienen als de rij van functies voor de definitie van de gegeneraliseerde functie $\delta(t)$. Verder is e^{-st} een functie die aan de daar gestelde eisen voldoet.

Derhalve wordt de laplace-getransformeerde van de δ -functie gedefinieerd door

$$F(s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\Delta}}{\Delta s} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{se^{-s\Delta}}{s} = 1.$$

VIII.4. Men heeft naast bovenstaande functies voor een groot aantal andere functies zoals $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, e^{at} enz. de laplacegetransformeerde functie berekend en deze verzameld in een tabel. Een verkorte versie van deze tabel is opgenomen op blz.167, waarbij ook nog een aantal belangrijke stellingen worden vermeld.

Enkele stellingen en hun toepassingen worden hieronder behandeld.

VIII.5. De transformatie van een gedifferentieerde en van een geïntegreerde functie.

VIII.5.1. Als $f(t) \leftrightarrow F(s)$ dan geldt

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow s F(s) - f(0^-).$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} f(t) \leftrightarrow F(s) &= \int_0^- \infty f(t) e^{-st} dt \\ \text{en } \frac{df(t)}{dt} &\leftrightarrow \int_0^- \infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Partiële integratie levert op

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow f(t) e^{-st} \Big]_{0^-}^{\infty} + s \int_0^- \infty f(t) e^{-st} dt \\ = -f(0^-) + s F(s). \end{aligned}$$

VIII.5.2.

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau.$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] dt &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau + \int_0^t f(\tau) d\tau \right] dt \\ &= \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau - \frac{1}{s} e^{-st} \int_0^t f(\tau) d\tau \Big|_{t=0^-}^{t=\infty} + \\ &\quad + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau + \frac{1}{s} F(s). \end{aligned}$$

VIII.6. De laplace-transformatie toegepast op de netwerkvergelijkingen.

Duiden wij de functies van de tijd met kleine letters en de corresponderende laplace-getransformeerden met hoofdletters aan, dan geldt voor:

a). de wetten van Kirchhoff: $\underline{A}i = 0 \leftrightarrow AI = 0$
 $\underline{B}i = 0 \leftrightarrow BI = 0.$

b). de transformatorvergelijkingen $\underline{N}i = 0 \leftrightarrow NI = 0$
 $\underline{P}i = 0 \leftrightarrow PI = 0.$

c). de spoel

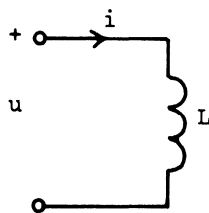


fig.106

$$u = L \frac{di}{dt} \leftrightarrow U = sLI - Li(0^-).$$

d). de condensator

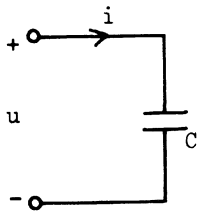


fig.107

$$i = C \frac{du}{dt} \leftrightarrow I = sCU - Cu(0^-)$$

of ook wel: $U = \frac{I}{sC} + \frac{u(0^-)}{s}$;

e). de weerstand

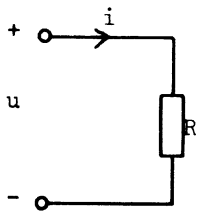


fig.108

$$u = Ri \leftrightarrow U = RI;$$

f). gekoppelde spoelen

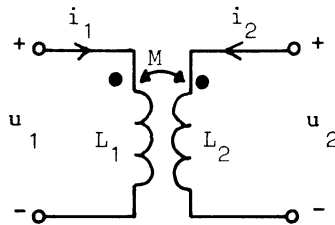


fig.109

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \leftrightarrow U_1 = sL_1 I_1 - L_1 i_1(0^-) + sM I_2 - M i_2(0^-)$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \leftrightarrow U_2 = sM I_1 - M i_1(0^-) + sL_2 I_2 - L_2 i_2(0^-).$$

Zijn de beginenergieën nul, dan ontstaat voor de spoel $U = sLI$
 en voor de condensator $U = \frac{1}{sC} I$.

We kunnen zodoende spreken van de impedantie $Z = sL$, resp. $Z = \frac{1}{sC}$.

In dit geval is rekenen in het s -gebied (behalve de keuze van de bronsterkten) isomorf aan het rekenen met complexe spanningen, stromen en immittanties, waarbij λ door s vervangen wordt.

VIII.7. De dempingsstelling

Als $f(t) \leftrightarrow F(s)$ dan geldt

$$f(t)e^{-at} \leftrightarrow F(s + a)$$

Bewijs: $F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

$$\begin{aligned} \text{dus } f(t)e^{-at} &\leftrightarrow \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-at} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-(s+a)t} dt = F(s+a). \end{aligned}$$

VIII.8. Wij zullen nu aan de hand van een eenvoudig voorbeeld illustreren hoe de laplace-transformatie wordt gebruikt om een netwerkprobleem op te lossen.

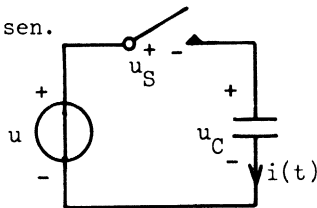


fig.110

Stel $u(t) = U_0$, $u_C(0^-) = \frac{1}{3} U_0$.

Op $t = 0$ wordt S gesloten.

Bereken $i(t)$.

Wij schrijven één lusvergelijking en een takvergelijking op:

$$u = u_S + u_C, \quad i = pCu_C,$$

waarin u_S de spanning over de schakelcontacten is. Het is van belang te realiseren dat deze vergelijkingen voor alle t gelden. Nu nemen wij de laplace-getransformeerden van deze vergelijkingen:

$$U = U_S + U_C, \quad I = sCU_C - C u_C(0^-).$$

Hieruit kunnen wij I en dus $i(t)$ bepalen als U_S bekend is.

Maar $U_S = \int_{0^-}^{\infty} u_S(t) e^{-st} dt = 0$, daar $u_S(t) = 0$ voor $t \geq 0$ en

$u_S(t) = u - u_C = 2/3 U_0$ voor $t < 0$.

Als de schakelaar gesloten wordt, is de spanning over de contacten nul voor alle $t \geq 0$, zodat de integraal van de functie $u_S(t)e^{-st}$ ook nul is.

Het gevolg is dat wij in het s -gebied de schakelaar-spanning kunnen negeren. De Laplace-getransformeerde vergelijkingen zijn precies dezelfde als in het geval dat de schakelaar van het begin af door een kortsluiting was vervangen, behalve dat nu de juiste beginvoorwaarde voor $t = 0^-$ zonder verdere berekening expliciet in de vergelijkingen voorkomt.

Het gevolg is ook dat in het s -gebied en dus ook voor $t > 0$ het netwerkprobleem equivalent is aan dat van fig.111*).

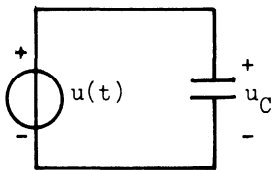


fig.111

$$u(t) = U_0 \varepsilon(t), \quad u_C(0^-) = 1/3 U_0.$$

Wij vinden dus door eenvoudige berekening:

$$I = sCU - Cu_C(0^-) = C(U_0 - 1/3 U_0)$$

$$\text{Dus } I = \frac{2}{3} C U_0$$

$$\text{en dus } i(t) = \frac{2}{3} C U_0 \delta(t).$$

Opmerking:

Volgens de continuïteitsstelling van het vorige hoofdstuk kan men niet garanderen dat de condensatorspanning continu is, daar er een lus van condensatoren en maakcontacten ontstaat als alle bronsterkten nul worden gemaakt. In dit geval is de condensatorspanning werkelijk discontinu daar de bijbehorende stroom een delta-functie verloop heeft. Bij een andere keuze van beginvoorwaarde echter, nl. $u_C(0^-) = U_0$, was $i(t) = 0$ en $u_C(t)$ wel continu.

*) Wat de berekening van de stroom betreft, zijn fig.110 en 111 ook equivalent voor $t = 0$.

VIII.9. De principes die bij dit eerste voorbeeld naar voren zijn ge-

komen, kunnen nog worden uitgebreid. Wanneer er meer schakelaars aanwezig zijn - zowel maak- als verbreekcontacten - is het niet zonder meer duidelijk dat er geen oneindige spanning over een maakcontact of geen oneindige stroom door een verbreekcontact voor $t < 0$ zou ontstaan. Maar op $t = 0$ verkeren de schakelaars in hun nieuwe toestand. De spanning over een maakcontact en de stroom door een verbreekcontact zijn per definitie altijd nul voor $t \geq 0$.

Indien zo'n spanning of stroom wel oneindig is voor $t < 0$, dan kiezen wij een integratie-interval $(-\xi, \infty)$ voor de definitie-integraal

$\int_{-\xi}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ waarin $-\xi > \eta$, $\xi \rightarrow 0$ en η de grootste waarde van t is waarvoor $x(t)$ oneindig is. Op deze manier is de Laplace-getransformeerde

van de spanning over een maakcontact of de stroom door een verbreekcontact altijd nul. Dus in alle gevallen, als de netwerkvergelijkingen éénmaal in het s -gebied zijn getransformeerd, kunnen de schakelaars worden genegeerd. Hetzelfde resultaat volgt als wij eerst de maakcontacten vervangen door kortsluitingen, de verbreekcontacten vervangen door open takken, de vergelijkingen transformeren en de beginvoorwaarden voor $t = 0^-$ invullen.

Natuurlijk moeten er geen tegenstrijdigheden in het netwerkprobleem worden ingebouwd zoals door fig.112 wordt geïllustreerd.

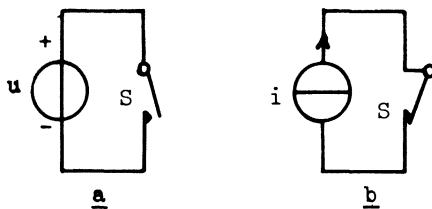


fig.112

Vraag: Waarom is fig.112b. strijdig? Vgl. de definitie van $\epsilon(t)$.

VIII.10. Uitgewerkte voorbeelden.

a)

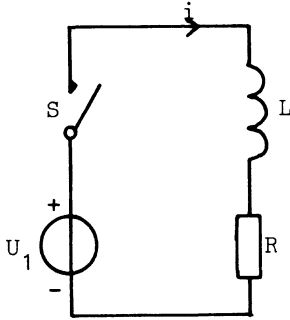


fig.113

De bron is een gelijkspanningsbron.

De schakelaar heeft een oneindig lange tijd open gestaan.

Op $t = 0$ wordt S gesloten.Bereken $i(t)$ voor $t \geq 0$.Oplossing: $i(0^-) = 0$.

Volgens de regels van §9 levert transformatie van de lusvergelijking:

$$\frac{U_1}{s} = (sL + R)I \quad \text{dus } I = \frac{U_1}{s(sL + R)} .$$

De laatste functie moet worden teruggetransformeerd naar het t -gebied. Hierbij maken we gebruik van de Laplace-tabel. Komt de functie hierin niet voor, dan moeten we trachten de functie te ontbinden in termen, die wel in de tabel voorkomen door de functie in partieelbreuken te ontbinden.

$$f(s) = \frac{1}{s(sL + R)} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{sL + R} .$$

De coëfficiënten A en B kunnen als volgt worden bepaald:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s) = 1/R ,$$

$$B = \lim_{s \rightarrow \frac{-R}{L}} ((sL + R) f(s)) = \frac{-L}{R} .$$

$$\text{Dus } \frac{1}{s(sL + R)} = \frac{1}{R} \frac{1}{s} - \frac{1}{R} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} .$$

Terugtransformeren met opzoeken in de Laplace-tabel levert:

$$i(t) = \frac{U_1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) .$$

b)

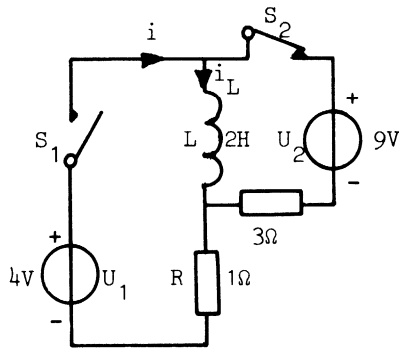


fig.114

Beide bronnen zijn gelijkspanningsbronnen. De schakelaars hebben oneindig lang in de getekende stand gestaan. Op $t = 0$ worden beide schakelaars omgezet.

Bereken $i(t)$ voor $t \geq 0$.

Oplossing: Tengevolge van U_2 vloeit er in L een beginstroom $i_L(0^-) = \frac{9}{3} = 3A$.

Transformatie van de vergelijking van de linkerlus levert:

$$\frac{4}{s} = (2s + 1) I - 2 \cdot 3.$$

Dus

$$I = \frac{\frac{4}{s} + 6}{2s + 1} = \frac{4}{s(2s + 1)} + \frac{6}{2s + 1}.$$

Splitting in partieelbreuken geeft

$$I = \frac{4}{s} - \frac{8}{2s + 1} + \frac{6}{2s + 1} = \frac{4}{s} - \frac{2}{2s + 1} = \frac{4}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{2}}.$$

Met de laplacetransformatie-tabel volgt

$$i(t) = 4 - e^{-\frac{1}{2}t}.$$

c) Gegeven: het schema met een gelijkstroom van 2A.

De getekende situatie bestaat voor alle $t < 0$.

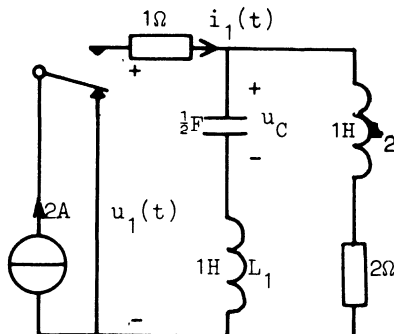


fig.115

Op het tijdstip $t = 0$ wordt de schakelaar omgezet.

Gevraagd: (a) Bereken de spanning over de stroombron voor $t \geq 0$.

(b) Controleer aan de hand van een beschouwing van het netwerk of het stationaire deel van de oplossing, onder (a) gevonden, juist is.

(c) Bepaal met gebruikmaken van het superpositiebeginsel de spanning over de stroombron voor $t \geq 0$ als:

$$u_C(0^-) = 6V.$$

Uitwerking: (a) $u_C(0^-) = 0$.

$$i_{L_1}(0^-) = 0 = i_{L_2}(0^-).$$

De impedantie van het eenpoortnetwerk rechts van de

schakelaar is $1 + \frac{(\lambda + 2)(\lambda + 2/\lambda)}{2\lambda + 2 + 2/\lambda}$. Als de begin-

waarden van condensatorspanningen en spoelstromen nul zijn, is de algebra van spanning- en stroomrelaties in het s -gebied isomorf aan de algebra van spannings- en stroomrelaties, wanneer alle spanningen en stromen van de vorm $U^{\lambda t}$ of $Ie^{\lambda t}$ zijn.

$$\text{Derhalve is } U_1(s) = \left[1 + \frac{(s + 2)(s + 2/s)}{2s + 2 + 2/s} \right] I_1(s).$$

Daar $I_1(s) = \frac{2}{s}$, is

$$U_1(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 4s + 6}{s(s^2 + s + 1)} = 1 + \frac{3s^2 + 3s + 6}{s(s^2 + s + 1)}$$

$$\frac{3s^2 + 3s + 6}{s(s^2 + s + 1)} \equiv \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + s + 1}$$

Hieruit volgt $A = 6, B = -3, C = -3$.

$$U_1(s) = 1 + \frac{6}{s} - 3 \frac{(s + 1)}{s^2 + s + 1} = 1 + \frac{6}{s} - \frac{3(s + 1)}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$U_1(s) = 1 + \frac{6}{s} - 3 \left\{ \frac{(s + \frac{1}{2})}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{3} \sqrt{3} \frac{\frac{1}{2} \sqrt{3}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right\}$$

$$u_1(t) = 1 \cdot \delta(t) + 6 - 3e^{-\frac{1}{2}t} \left\{ \cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}t) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}t) \right\}$$

$t \geq 0.$

(b) Voor $t \rightarrow \infty$ is $u(t) = 6$. Dit is het stationaire deel van de oplossing. Beschouwen wij het netwerk nadat de vrije trillingen zijn weggedempt, dan voert de condensor geen stroom en bestaat over de spoelen geen spanning. Het netwerk gedraagt zich als een weerstand van 3Ω . Bij 2A betekent dit een spanning van 6V.

(c)

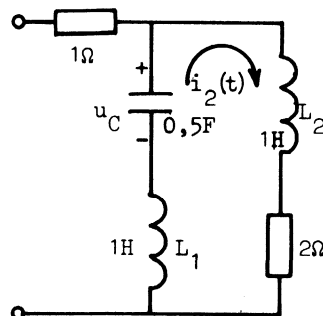


fig.116

Als nu $u_C(0^-) \neq 0$, wordt er op de reeds gevonden oplossing een vrije trilling gesuperponeerd, die bepaald wordt door de gegeven beginvoorwaarden:
 $u_C(0^-) = 6, i_{L_1}(0^-) = 0 = i_{L_2}(0^-)$,
 en de poortvoorwaarden (nl. open poort daar het netwerk door een stroombron wordt afgesloten).
 Deze vrije trilling geeft aanleiding

tot de stroom $i_2(t)$, welke na laplace-transformatie voldoet aan:

$$U_C = s(L_1 + L_2)I_2 + RI_2$$

$$I_2 = -sC U_C + C u_C(0^-).$$

Eliminatie van U_C geeft

$$I_2 = \frac{6}{2(s^2 + s + 1)}.$$

Deze stroom resulteert in een poortspanning

$$(s + 2) I_2 = \frac{3(s + 2)}{s^2 + s + 1} = 3 \left[\frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{3} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right]$$

Terugtransformeren naar het t-gebied resulteert in een spanning

$$3 e^{-\frac{1}{2}t} \left[\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}t) + \sqrt{3} \sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}t) \right]$$

welke wordt gesuperponeerd op de onder (a) gevonden spanning.

$$\text{Dus } u_1(t) = \delta(t) + 6 + 2\sqrt{3} e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}t). \quad t \geq 0.$$

d) Gegeven: het schema.

$u(t) = 5 \cos(t)$. De schakelaar heeft steeds in de getekende

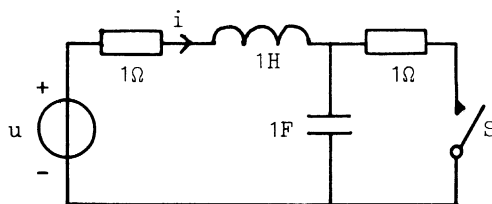


fig.117

stand gestaan. Op het tijdstip $t = 0$ wordt de schakelaar gesloten.

Gevraagd: (a) Bepaal de beginvoorwaarden $i_L(0^-)$ en $u_C(0^-)$.

(b) Bereken $i(t)$ voor $t > 0$.

Uitwerking *): (a) Wij bepalen eerst de beginvoorwaarden door middel van complex rekenen. Immers, uit de gegevens volgt dat voor $t < 0$ alle eventueel bestaande vrije trillingen uitgestorven zijn, zodat de oplossing alleen uit de (periodieke) particuliere integraal bestaat.

Wij vinden $u = 5 \cos t$, zodat de complexe $U = 5$ is.

Dan is $I = \frac{5}{1 + j - j} = 5A$ zodat $i = 5 \cos t$ en

$$i(0^-) = 5A;$$

$$U_C = \frac{1}{j} 5 = -5j, u_C = 5 \sin t \text{ en } u_C(0^-) = 0 \text{ V.}$$

(b) Laplace-transformatie van de netwerkvergelijkingen voor $t \geq 0$ levert:

$$\frac{5s}{s^2 + 1} = (s + 1) I - 5 + U_C.$$

Daar $u_C(0^-) = 0$, is $U_C = \frac{1}{s + 1} I$.

Dus $\frac{5s}{s^2 + 1} + 5 = (s + 1 + \frac{1}{s + 1}) I$

en $I = 5 \frac{s + 1}{s^2 + 1} \cdot \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 2} \equiv 5 \left\{ \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 2} \right\}.$

Dus $As^3 + 2As^2 + 2As + Bs^2 + 2Bs + 2B + Cs^3 + Cs + Ds^2 + D \equiv s^3 + 2s^2 + 2s + 1,$

zodat $2B + D = 1$

$$2A + 2B + C = 2$$

$$2A + B + D = 2$$

$$A + C = 1.$$

Hieruit volgt $A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{1}{5}$, $C = \frac{2}{5}$, $D = \frac{3}{5}$,

zodat $I = \frac{3s + 1}{s^2 + 1} + \frac{2s + 3}{(s + 1)^2 + 1} = 3 \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} + 2 \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2 + 1}.$

*) Men lette goed op dat de symbolen U en I in (a) een heel andere betekenis hebben dan in (b). In beide gevallen zijn zij functies van complexe veranderlijken.

$$\text{Dus *) } i = 3 \cos t + \sin t + 2e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t$$

voor $t \geq 0$.

e) Gegeven het schema.

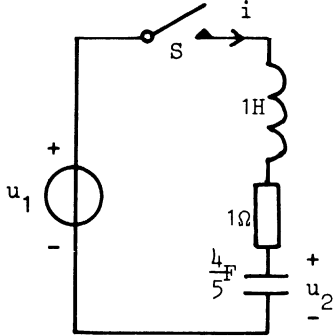


fig.118

Voor $t < 0$ is $i = 0$ A

en $u_2 = 1$ V.

Op $t = 0$ wordt S gesloten.

De bronspanning is $u_1 = e^{-\frac{1}{2}t} \cos(t)$.

Gevraagd:

Bereken $u_2(t)$ voor $t \geq 0$.

Uitwerking:

$$u_1 = (e^{-\frac{1}{2}t} \cos t) \quad \rightarrow \quad U_1 = \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + 1} \quad (1)$$

$$U_1 = (s + 1 + \frac{1}{\frac{4}{5}s}) I + \frac{1}{s} \quad (2)$$

$$U_2 = \frac{1}{\frac{4}{5}s} I + \frac{1}{s} \quad (3)$$

Eliminatie van I levert op:

$$U_2 = 5 \cdot \frac{4s + 2}{(4s^2 + 4s + 5)^2} + \frac{4(s + 1)}{4s^2 + 4s + 5}$$

$$= \frac{10}{16} \frac{2s + 1}{(s^2 + s + \frac{5}{4})^2} + \frac{s + 1}{s^2 + s + \frac{5}{4}}$$

$$U_2 = \frac{5}{8} \frac{2s + 1}{(s^2 + s + \frac{5}{4})^2} + \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + 1}$$

*) Dit is een voorbeeld waar de methoden van hoofdstuk VII veel minder rekenwerk dan de laplacetransformatie geven. Laat dit zien.

De eerste term kan worden geschreven

$$-\frac{5}{8} \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2 + s + \frac{5}{4}}.$$

Volgens de transformatieregels is $-\frac{d}{ds} F(s) \leftrightarrow t f(t)$ als $F(s) \leftrightarrow f(t)$.

Derhalve vinden wij de complete oplossing:

$$u_2 = \frac{5}{8} t e^{-\frac{1}{2}t} \sin t + e^{-\frac{1}{2}t} \cos t + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \sin t \quad t \geq 0.$$

Opmerking:

De complexe bronfrequentie is $\lambda = -\frac{1}{2} + j$, terwijl de karakteristieke vergelijking de wortels $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + j$ en $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - j$ heeft (ga dit na). D.w.z. de complexe frequentie van de bron is gelijk aan een eigenfrequentie van het netwerk.

Dit verschijnsel staat bekend onder de naam "complexe resonantie".

Het gevolg is hier het optreden van de factor t . (Zie EN.I blz.299 e.v.).

Indien de eigenfrequentie zuiver imaginair was, zou de responsie u_2 , i een term $t \sin t$ bevatten, d.w.z. een steeds met de tijd toenemende "amplitude". Vergelijk de gewone resonantie als $Q_0 \rightarrow \infty$.

- f) Tot besluit behandelen wij een voorbeeld, waarbij de laplacetransformatie wordt toegepast op de toestandsvergelijkingen.

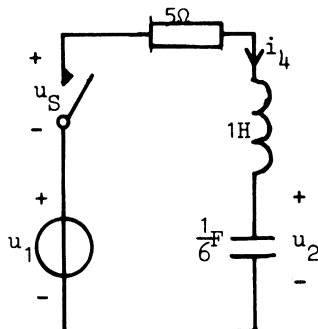


fig.119

Op $t = 0$ wordt de schakelaar gesloten.

Wij vonden op blz.100 de toestandsvergelijkingen voor deze schakeling, die na invullen van de elementwaarden worden:

$$p \begin{bmatrix} u_2 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u_1 + u_S).$$

Stel $u_1(t) = 12$ V, terwijl verder $u_2(0^-) = 6$ V en $i_4(0^-) = 2$ A; dan ontstaat na laplacetransformatie:

$$\begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s + 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{12}{s}.$$

Hierin zijn U_2 en I_4 functies van s .

Uitwerken levert op:

$$U_2 = 6 \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s+2} \right); \text{ dus } u_2 = 6(2 - e^{-2t});$$

$$I_4 = \frac{2}{s+2}; \text{ dus } i_4 = 2e^{-2t}. \quad (\text{Zie blz.135}).$$

TABEL

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

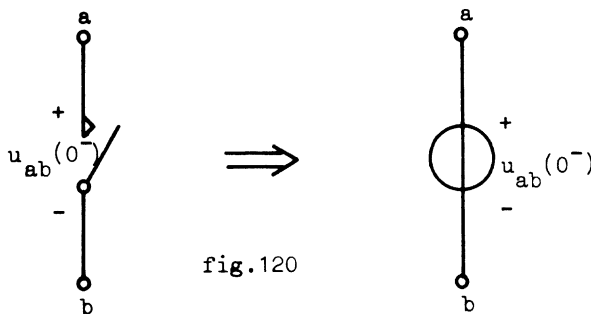
	tijdgebied		s-gebied
	$f = f(t)$		$F = F(s)$
1)	af		aF
2)	$af_1 + bf_2$		$aF_1 + bF_2$ (lineariteit)
3)	$f e^{-at}$		$F(s + a)$ (dempingsregel)
4)	$\varepsilon(t - a) f(t - a), a$ reëel		$e^{-as} F(s)$ (verschuivingsregel)
5)	$\frac{df}{dt}$		$sF - f(0^-)$
6)	$\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau$		$\frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau$
7)	$t f(t)$		$-\frac{dF}{ds}$
8)	$\varepsilon(t)$		$\frac{1}{s}$ $\text{Re } s > 0$
9)	$\frac{t^n}{n!}$ (n , een natuurlijk getal)		$\frac{1}{s^{n+1}}$ $\text{Re } s > 0$
10)	e^{-at}		$\frac{1}{s + a}$ $\text{Re } s > -\text{Re } a$
11)	$\sin(\omega t)$		$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ $\text{Re } s > 0$
12)	$\cos(\omega t)$		$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ $\text{Re } s > 0$
13)	$\delta(t)$		1 alle s
14)	$\int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau, t > 0$		$F(s) G(s)$
	$f(-t) = 0$ voor $t > 0$		

VIII.11. Laplace-transformatie van de algemene toestandsvergelijkingen van netwerken met schakelaars.

Wij beschouwen een netwerk opgebouwd uit een willekeurig aantal bronnen, schakelaars, weerstanden, spoelen en condensatoren. In dat geval kunnen we de graphtheorie gebruiken en dus het begrip "boom" hanteren.

Bevat het netwerk bovendien transformatoren, dan moet in het onderstaande het begrip boomtakspanning, resp. koordestroom, vervangen worden door onafhankelijke poortspanning, resp. onafhankelijke poortstroom.

Wij willen de toestandsvergelijkingen van zo'n netwerk opschrijven aan de hand van de theorie van hoofdstuk VI. Hiertoe is het nodig de schakelaars in het prioriteitenschema van § VI.2. in te passen. Wij behandelen maakcontacten alsof zij spanningsbronnen waren (fig.120).

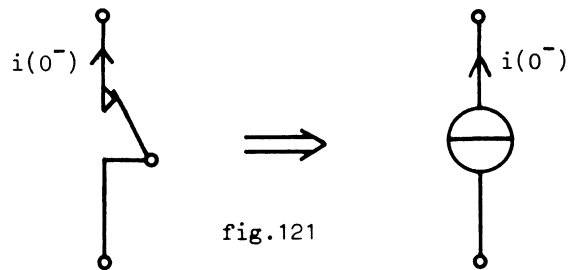


Op $t = 0^-$ zijn beide spanningen $u_{ab}(0^-)$.

Op $t = 0$ worden beide spanningen nul. De bronspanning is dus in het algemeen discontinu op $t = 0$. Alle stromen en spanningen voor $t \geq 0$ in het netwerk blijven door deze beschouwingwijze ongewijzigd.

Dit betekent, dat voor $t < 0$ wij expliciet in onze vergelijkingen de spanningen over de maakcontacten \underline{u}_S moeten opnemen. Voor $t \geq 0$ zijn deze spanningen nul.

Op duale wijze worden de verbreekcontacten als stroombronnen behandeld met op $t = 0$ discontinue sterkte.(fig.121).



Wij zullen nu de echte bronnen met de naam "energie-bronnen" en de bronnen afkomstig van de schakelaar met "schakel-bronnen" aanduiden.

Wij kiezen een boom, waarin alle spanningsbronnen (energiespanningsbronnen en schakelspanningsbronnen) zijn opgenomen. Alle stroombronnen nemen wij op in de co-boom. Verder blijft het prioriteitenschema ongewijzigd.

Dit is altijd mogelijk, daar er anders, voor $t \geq 0$, lussen van spanningsbronnen of sneden van stroombronnen zouden ontstaan.

Opmerking: Een triviaal geval is het bestaan van een lus van louter maakcontacten. Wij kunnen dan zonder bezwaar één maakcontact uit zo'n lus schrappen, want voor $t \geq 0$ blijft er een weg tussen elk van de knooppunten van die lus. De duale situatie is die met een snede van uitsluitend verbreekcontacten.

Vervolgens leiden wij de toestandsvergelijkingen volgens § VI.3. af:

$$p \begin{bmatrix} \underline{u}_2 \\ \underline{i}_7 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \underline{u}_2 \\ \underline{i}_7 \end{bmatrix} + G\underline{w}. \quad (1)$$

De vector \underline{w} bevat dus alle bronsterkten en eventueel hun afgeleiden.

Laplacetransformatie levert op:

$$s \begin{bmatrix} U_2 \\ I_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{u}_2(0^-) \\ \underline{i}_7(0^-) \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} U_2 \\ I_7 \end{bmatrix} + G\underline{W}. \quad (2)$$

Zoals wij in § VIII.8. hebben aangetoond, is de laplacetransformatie van een schakelbronsterkte nul. Voor de afgeleide van

een schakelbronsterkte is dit echter niet het geval.

Immers:

$$\int_{0^-}^{\infty} (p u_S) e^{-st} dt = s U_S - u_S(0^-) = -u_S(0^-), \quad (3)$$

daar $U_S = 0$.

Dus zullen na laplace-transformatie de schakelbronsterkten nog aanwezig zijn in de toestandsvergelijkingen en dus moeten zij worden geëlimineerd voordat wij verder kunnen gaan.

Wij richten nu onze aandacht op de formules (15) en (16) van blz.106.

Daarin komen voor de termen

$$pN_{25} C_5 N'_{15} u_1 \quad (4)$$

en

$$pN'_{47} L_4 N_{48} i_8. \quad (5)$$

Na de laplacetransformatie ontstaat:

$$sN_{25} C_5 N'_{15} U_1 - N_{25} C_5 N'_{15} u_1(0^-) \quad (6)$$

en

$$sN'_{47} L_4 N_{48} I_8 - N'_{47} L_4 N_{48} i_8(0^-). \quad (7)$$

Met behulp van (7) resp. (6) van blz.104 worden deze uitdrukkingen:

$$sN_{25} C_5 N'_{15} U_1 - N_{25} C_5 \left[u_5(0^-) - N'_{25} u_2(0^-) \right] \quad (8)$$

en

$$sN'_{47} L_4 N_{48} I_8 + N'_{47} L_4 \left[i_4(0^-) + N_{47} i_7(0^-) \right]. \quad (9)$$

Laplacetransformatie van de complete toestandsvergelijkingen (15) en (16) van blz.106 geeft met verwerking van bovenstaande uitdrukkingen:

$$\begin{aligned} & \left[s \mathbf{1} + C^{-1} N_{26} R^{-1} N'_{26} \right] U_2 + C^{-1} \left[N_{27} - N_{26} R^{-1} N'_{36} R_3 N_{37} \right] I_7 = \\ & = -C^{-1} \left[N_{26} R^{-1} N'_{16} + sN_{25} C_5 N'_{15} \right] U_1 + \left[N_{26} R^{-1} N'_{36} R_3 N_{38} + \right. \\ & \left. - N_{28} \right] I_8 + \left[\mathbf{1} - C^{-1} N_{25} C_5 N'_{25} \right] u_2(0^-) + C^{-1} N_{25} C_5 u_5(0^-) \quad (10) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 & -L^{-1} \left[N'_{27} - N'_{37} G^{-1} N_{36} G_6 N'_{26} \right] U_2 + \left[s \mathbf{1} + L^{-1} N'_{37} G^{-1} N_{37} \right] I_7 = \\
 & = L^{-1} \left[N'_{17} - N'_{37} G^{-1} N_{36} G_6 N'_{16} \right] U_1 - L^{-1} \left[N'_{37} G^{-1} N_{38} + \right. \\
 & \quad \left. + s N'_{47} L_4 N_{48} \right] I_8 + \left[\mathbf{1} - L^{-1} N'_{47} L_4 N_{47} \right] \dot{i}_7(0^-) - L^{-1} N'_{47} L_4 \dot{i}_4(0^-).
 \end{aligned} \tag{11}$$

In deze vergelijkingen komen slechts bekende grootheden in de rechterleden voor. Weliswaar bevatten de vectoren U_1 en I_7 componenten, afkomstig van de laplacegetransformeerde schakelbronsterkten, maar deze zijn nul.

Tot zover hebben wij de schakelaars als deel van het netwerk opgenomen, zodat de graph van het netwerk afhangt van de aanwezigheid van de schakelaars. Wij zullen nu aantonen, dat de matrices, die in (10) en (11) voorkomen toch uitsluitend gebaseerd zijn op de graph van het netwerk, dat bestaat voor $t \geq 0$, d.w.z. het netwerk, dat resulteert door de verbreekcontacten te verwijderen en de beide knooppunten van elk maakcontact tot één knooppunt samen te voegen.

Als een element van U_1 , bijv. in rij k , nul is, zijnde de laplacetransformatie van een schakelbronspanning, blijven de vergelijkingen (10) en (11) onveranderd, als kolom k van N'_{15} , N'_{16} en N'_{17} nul is, daar deze submatrices van N alleen in combinatie met U_1 voorkomen. Bovendien komt N'_{18} in het geheel niet in (10) en (11) voor, zodat de vergelijkingen niet veranderen als wij eveneens de kolom k van N'_{18} nul stellen. Dit houdt in dat rij k van

$$\left[N_{15} \quad N_{16} \quad N_{17} \quad N_{18} \right]$$

nul gesteld kan worden.

Vergelijken met (1) van blz.101 toont aan, dat wij dan te maken hebben met een netwerk waarin een snede is, bestaande uit één maakcontact.

Een dergelijke tak kan genegeerd worden omdat deze geen invloed uitoefent op het elektrisch gedrag van het netwerk. Dit betekent, dat dezelfde vergelijkingen (10) en (11) resulteren, als wij uitgaan van een netwerk, dat geen snede bevat, die overeenkomt met rij k .

Dezelfde argumentatie geldt voor alle andere maakcontacten.

Voor de verbreekcontacten geldt de duale redenering waarbij een rij j

van $\begin{bmatrix} N'_{18} & N'_{28} & N'_{38} & N'_{48} \end{bmatrix}$

gelijk aan nul wordt gesteld.

Dat betekent een netwerk, dat geen lus bestaande uit één maakcontact bevat, die met rij j overeenkomt.

Willen wij echter de stroom door een maakcontact of de spanning over een verbreekcontact voor $t \geq 0$ bepalen, dan zouden wij toch de graph van het netwerk voor $t < 0$ moeten hanteren en de formules (3) of (10) van blz.104 moeten gebruiken. Het is echter eenvoudiger uit te gaan van de graph van het netwerk voor $t \geq 0$ en door berekening van naburige spanningen of stromen de gevraagde schakelaarstroom of -spanning te bepalen.

Wij hebben hiermede aangetoond, dat we in de oplosmethode van Laplace de beginwaarden op $t=0^-$ (met de nadruk op "min") mogen nemen, terwijl we toch de vergelijkingen mogen opschrijven aan de hand van het netwerk na het schakelen!

De coëfficiëntenmatrix van de toestandsvector in (10) en (11) is:

$$H = \begin{bmatrix} s I + C^{-1} N_{26} R^{-1} N'_{26} & C^{-1} \begin{bmatrix} N_{27} - N_{26} R^{-1} N'_{36} R_3 N_{37} \end{bmatrix} \\ L^{-1} \begin{bmatrix} N'_{27} - N_{37} G^{-1} N_{36} G N'_{26} \end{bmatrix} & s I + L^{-1} \begin{bmatrix} N'_{37} G^{-1} N_{37} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Dit betekent dat $\begin{bmatrix} U_2 \\ I_7 \end{bmatrix}$ eenduidig bepaald is, als H niet-singulier is.

Nu is H voor voldoende grote s niet-singulier, dus $\det H$ is zeker niet identiek nul.

Slechts voor een eindig getal waarden van s (eigenwaarden) is

$$\det H = 0. \quad (13)$$

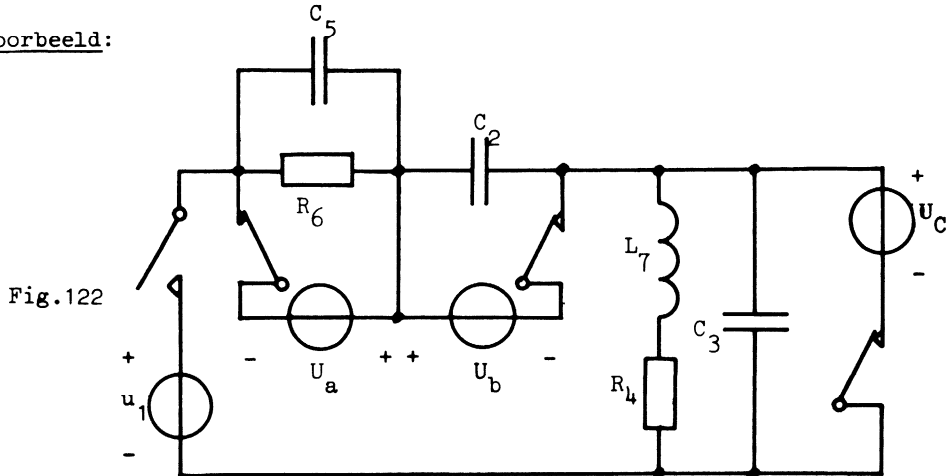
Dit is de voorwaarde voor het ontstaan van vrije trillingen, zodat (13) de karakteristieke vergelijking is.

De grootte van de amplituden worden bepaald door de waarden der begin-

energieën.

De graad van (13) is de orde van de toestandsvector, d.w.z. $c_2 + l_7$ zoals reeds in hoofdstuk IV is afgeleid.

Voorbeeld:



$$C_2 = C_3 = C_5 = 1 \text{ F}, \quad L_7 = 1 \text{ H}, \quad R_4 = R_6 = 1 \Omega.$$

De bronnen U_a , U_b en U_c zijn gelijkspanningsbronnen, waarmee de beginvoorwaarden worden gerealiseerd.

Op $t = 0$ werken alle schakelaars, het schema wordt dan:

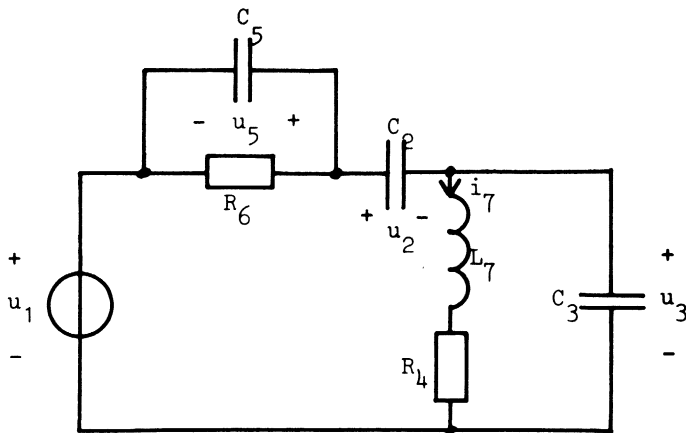


fig.123

De graph is:

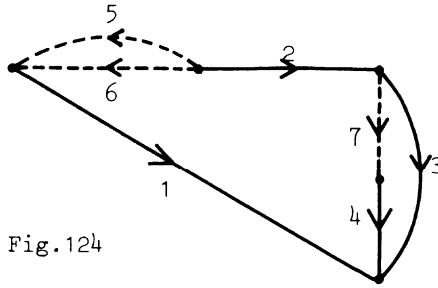


Fig.124

Er is een lus van condensatoren als de bronsterkte nul wordt gekozen. Het netwerk is dus van de derde orde. De indices zijn gekozen in overeenstemming met de taknummering in de graph. De boom is een standaardboom bestaande uit de takken 1, 2, 3 en 4. Omdat het netwerk geen transformatoren bevat, is $\mathbf{N} = \mathbf{Q}$.

De toestandsvector is
$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ i_7 \end{bmatrix} .$$

We vinden (vergelijk blz.101)

$$\mathbf{N} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & N_{15} & N_{16} & N_{17} \\ 0 & 1 & 0 & N_{25} & N_{26} & N_{27} \\ 0 & 0 & 1 & N_{35} & N_{36} & N_{37} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

In dit voorbeeld zijn er geen stroombronnen, dus N_{18} , N_{28} en N_{38} ontbreken. Omdat er geen spoelen in de boom zijn, ontbreekt tevens kolom 4 (en rij 4).

Verder gelden:

$$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_1 = u_1, \quad \underline{i}_7 = i_7, \quad \underline{i}_8 = 0,$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_5 = 1, \quad \mathbf{L}_7 = 1, \quad \mathbf{R}_3 = 1, \quad \mathbf{R}_6 = 1.$$

Substitutie van de gegevens levert op:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{zie blz.106});$$

verder is $L = 1$, $R = 1$, $G = 1$.

Hierdoor ontstaat uit (10) door beide leden met C te vermenigvuldigen

$$\begin{aligned} & \left\{ s \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} U_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} I_7 = \\ & = - \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} U_1 + \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} u_2(0^-) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_5(0^-) \end{aligned}$$

en uit (11):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} U_2 + \begin{bmatrix} s+1 \end{bmatrix} I_7 = \underline{i}_7(0^-)$$

d.w.z.

$$\begin{bmatrix} 2s+1 & s+1 & 0 \\ s+1 & 2s+1 & 1 \\ 0 & -1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 \\ s+1 \\ 0 \end{bmatrix} U_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(0^-) \\ u_3(0^-) \\ u_5(0^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} i_7(0^-).$$

Stel $u_1(t) = 2$ (in het eerste schema is dat dus een gelijkspanningsbron van 2 V)

en $u_2(0^-) = u_3(0^-) = 1$ V, $u_5(0^-) = 2$ V en $i_7(0^-) = 1$ A,

dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ I_7 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3s^3 + 5s^2 + 4s + 1} \begin{bmatrix} 2s^2 + 3s + 2 & -(s+1)^2 & s+1 \\ -(s+1)^2 & 2s^2 + 3s + 1 & -(2s+1) \\ -(s+1) & 2s+1 & 3s^2 + 2s \end{bmatrix} \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{2}{s}(s+1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ I_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{3s^3 + 5s^2 + 4s + 1} \begin{bmatrix} 5s^2 + 8s + 8 + \frac{2}{s} \\ 5s^2 + 5s + 1 \\ 3s^2 + 7s + 2 \end{bmatrix}$$

Dus

$$U_2 = \frac{A_2}{s} + \frac{B_2}{s+\alpha} + \frac{C_2s + D_2}{(s+\sigma)^2 + \omega^2},$$

waarin de constanten nog moeten worden bepaald.

Hieruit volgt:

$$U_2 = \frac{A_2}{s} + \frac{B_2}{s+\alpha} + F_2 \frac{s + \sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega^2} + H_2 \frac{\omega}{(s+\sigma)^2 + \omega^2},$$

waarna terugtransformatie naar het tijdgebied oplevert voor $t \geq 0$:

$$u_2 = A_2 + B_2 e^{-\alpha t} + e^{-\sigma t} (F_2 \cos \omega t + H_2 \sin \omega t).$$

Ook vinden we:

$$U_3 = \frac{B_3}{s+\alpha} + F_3 \frac{s + \sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega^2} + H_3 \frac{\omega}{(s+\sigma)^2 + \omega^2},$$

dus $u_3 = B_3 e^{-\alpha t} + e^{-\sigma t} (F_3 \cos \omega t + H_3 \sin \omega t)$

en $I_7 = \frac{B_7}{s+\alpha} + F_7 \frac{s + \sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega^2} + H_7 \frac{\omega}{(s+\sigma)^2 + \omega^2},$

dus $i_7 = B_7 e^{-\alpha t} + e^{-\sigma t} (F_7 \cos \omega t + H_7 \sin \omega t).$

Berekening m.b.v. een tafelrekenmachine levert op:

$$A_2 = 2$$

$$B_2 = 0,454$$

$$F_2 = -0,787$$

$$H_2 = -0,650$$

$$\begin{aligned} B_3 &= -0,144 \\ F_3 &= 1,811 \\ H_3 &= -0,043 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_7 &= -0,243 \\ F_7 &= 1,243 \\ H_7 &= 2,075 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= 0,631 \\ \omega &= 0,651 \\ \alpha &= 0,406 \end{aligned}$$

Opgave: Bereken uit het bovenstaande

- a) $u_2(0^+)$, $u_3(0^+)$ en $i_7(0^+)$
 b) $u_2(\infty)$, $u_3(\infty)$ en $i_7(\infty)$

en ga aan de hand van het netwerk na of uw resultaat juist is.

VIII.12. Bewijs van de continuïteitsstelling.

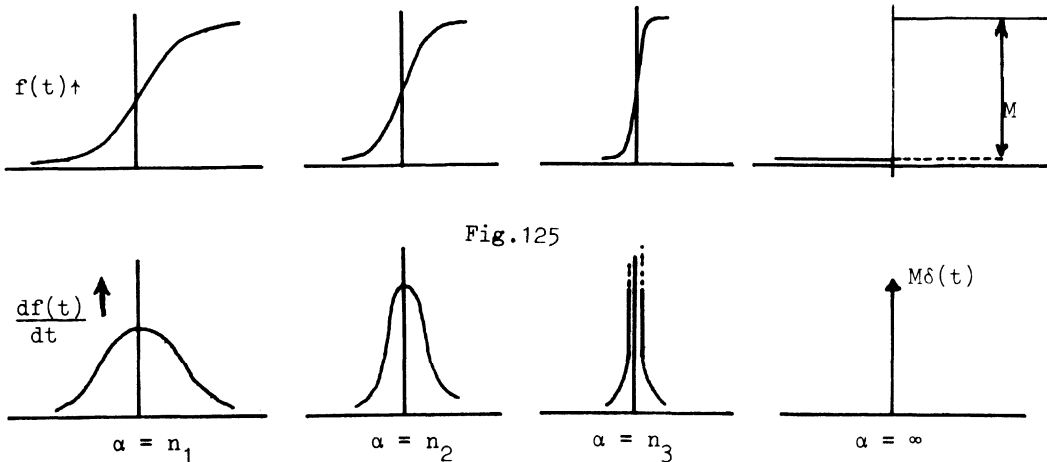
In § VII.7. hebben wij de continuïteitsstelling ingevoerd en toegepast. Wij zullen nu een bewijs voor deze stelling leveren, gebaseerd op de toestandsvergelijkingen van het complete netwerk. D.w.z. in tegenstelling tot het eindresultaat van § VIII.11 gaan wij weer uit van de **N**-matrix van een netwerk waarin de schakelaars opgenomen zijn en als bronnen worden beschouwd.

Eerst moeten wij een paar algemene opmerkingen over continuïteit maken en in het bijzonder omschrijven wat wij onder de afgeleide van een discontinue functie in het punt van de discontinuïteit verstaan. Natuurlijk is het zo dat een discontinue functie niet in de gewone betekenis differentieerbaar is. Zoals wij meer opgemerkt hebben, is een klassiek fysisch proces, ook wanneer het zeer snel verloopt, in wezen continu.

Als wij een rij van dergelijke processen beschouwen, waarbij naarmate het rangnummer van een proces in deze rij toeneemt, de overgang van één niveau naar een ander niveau in een steeds korter tijdinterval geschiedt, dan vertoont de limiet van deze rij een discontinuïteit. Dit limietproces bestaat niet echt als fysisch proces, maar is de idealisering van een

fysisch proces, wanneer het preciese verloop tijdens de overgang van het ene niveau naar het andere niet bekend behoeft te zijn.

Ieder proces in deze rij wordt beschreven door een continue, differentieerbare functie van de tijd. Als het rangnummer α in de rij toeneemt, bereikt de afgeleide steeds grotere waarden in de omgeving van de discontinuïteit.



In het limietgeval is de afgeleide een delta-functie, wanneer de oorspronkelijke functie een eenvoudige discontinuïteit vertoont *).

Wij kunnen dan zeggen dat de afgeleide van een discontinue functie eigenschappen heeft, die volgen uit de limieteigenschappen van de afgeleiden van een rij continue functies. De afgeleide is geen gewone functie maar is iets dat na integratie de discontinue functie levert. Het is dan ook mogelijk de afgeleiden van verschillende discontinue functies onderling te vergelijken.

Beschouwen wij bijvoorbeeld een ongeladen condensator van 1 F , die op $t = 0$ op een spanningsbron van 1 V wordt aangesloten. Er komt dan op $t = 0$ lading van 1 C op de condensator en er vloeit een stroom van $1\delta(t)\text{ A}$. Was de capaciteit 2 F geweest, dan was bij dezelfde bronsterkte

*) De functie $\epsilon(t)$ heeft een eenvoudige discontinuïteit in de oorsprong. Een functie zoals $\frac{1}{t}$ heeft een hogere discontinuïteit op $t = 0$, daar de functiewaarde een sprong van $-\infty$ naar $+\infty$ maakt. De limiet van de functie $\frac{1}{nt}$, met $n \rightarrow \infty$, maakt een sprong van 0^- naar $-\infty$ en een sprong van $-\infty$ naar $+\infty$ en een sprong van $+\infty$ naar 0^+ binnen het interval $(0^-, 0^+)$. Dit is een nog hogere orde van discontinuïteit.

de lading $2 C$ en de stroom $2\delta(t)$.

Op deze wijze kunnen wij een rekenwijze met delta-functies opbouwen.

Als wij nu de rij van fysische processen met de functies $f(t, \alpha)$ beschrijven, waarbij als $\alpha \rightarrow \infty$, $f(t, \alpha) \rightarrow f(t, \infty)$, welke een functie met een discontinuïteit op $t = 0$ is, dan is

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} f(t, \alpha) = [f(0^+) - f(0^-)] \delta(t)$$

en is

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{0^+} \frac{df}{dt}(t, \alpha) h(t) dt = [f(0^+) - f(0^-)] h(0)$$

indien $h(t)$ continu op $t = 0$ is.

Verder is

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left. \frac{f(t, \alpha)}{\frac{d}{dt} f(t, \alpha)} \right|_{t=0} = 0.$$

Dit is als volgt in te zien:

$$\frac{d}{dt} f(t, \alpha) = \frac{f(+t_2, \alpha) - f(-t_1, \alpha)}{t_2 + t_1} + o(t_2 + t_1),$$

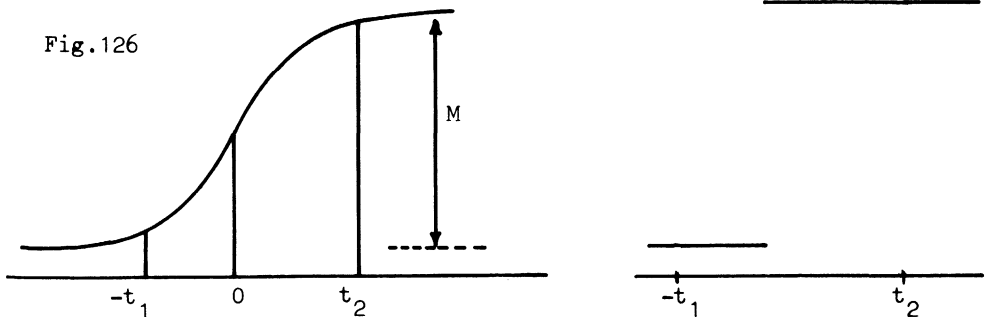
waarin $t_2 > 0$, $t_1 < 0$ en $t_2, t_1 \rightarrow 0$.

Dan is

$$\left. \frac{f(t, \alpha)}{\frac{d}{dt} f(t, \alpha)} \right|_{t=0} = \frac{f(0, \alpha) \Delta t}{f(t_2, \alpha) - f(t_1, \alpha) + o(\Delta t)^2}$$

waarin $\Delta t = t_2 + t_1$. Nu is voor alle voldoende grote α , d.w.z. $\alpha > A$,

$|f(t_2, \alpha) - f(t_1, \alpha)| > M$ bij vaste t_2 en t_1 . Anders zou $f(t, \alpha)$ niet naar een discontinue functie naderen als $\alpha \rightarrow \infty$.



Verder is $f(0, \alpha)$ begrensd voor $\alpha > A$, daar $f(t, \alpha)$ continu is, en $f(t, \infty)$ een eenvoudige discontinuïteit vertoont. Er volgt dat, door Δt voldoende klein te maken, $\frac{f(t, \alpha)}{\frac{d}{dt} f(t, \alpha)}$ willekeurig klein kan worden gemaakt

als α voldoende groot is.

$$\text{D.w.z. } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(t, \alpha) / f'(t, \alpha) \Big|_{t=0} = 0.$$

Voortaan zullen wij zeggen dat $\frac{d}{dt} f(t, \infty) \Big|_{t=0}$ de functie $f(0, \infty)$

domineert. Dit betekent dat in lineaire combinaties van deze twee functies, $f(t, \infty)$ verwaarloosd kan worden t.o.v. $f'(t, \infty)$ op $t = 0$.

Wij beschouwen nu de toestandsvergelijkingen

$$\underline{p}\underline{x} = \underline{F}\underline{x} + \underline{G}\underline{w}.$$

Op grond van het voorgaande; indien sommige componenten van \underline{x} een eenvoudige discontinuïteit vertonen op $t = 0$, terwijl de overige componenten continu zijn, bestaat er tenminste één component x_k van \underline{x} , zodanig dat $(\underline{F}\underline{x})_k$ wordt gedomineerd door $\underline{p}x_k$. Stel nu dat \underline{w} uit continue functies of functies met een eenvoudige discontinuïteit op $t = 0$ bestaan. Dan is x continu. Anders, als x discontinu was, zou er een $\underline{p}x_k$ bestaan die $(\underline{F}\underline{x})_k$ domineert. Verder zou $\underline{p}x_k$ een hogere discontinuïteit vertonen (delta-functie) die niet gelijk kan zijn aan de eenvoudige discontinuïteiten in $\underline{G}\underline{w}$. Indien echter \underline{w} delta-functies bevat, dan zou $\underline{p}\underline{x}$ ook delta-functies moeten bevatten, zodat \underline{x} functies met eenvoudige discontinuïteiten bevat.

Wij kijken nu naar de gedetailleerde vorm van de toestandsvergelijkingen, (15) en (16) op blz.106. Indien alle bronsterkten continu zijn, is de oplossing van de vergelijkingen voor $t < 0$ ook continu en zijn alle stromen en spanningen begrensd. Derhalve vertonen de schakelaarsterkten een eenvoudige discontinuïteit. Dus kunnen wij garanderen dat een component in een rij k van \underline{i}_7 continu is, indien in rij k van (16) de coëfficiënt van de afgeleide van iedere schakelaarsterkte nul is. D.w.z. de k^{de} component van \underline{i}_7 is continu als er in $N'_{47} L_4 N_{48} \underline{i}_8$ geen schakelaarsterkte voorkomt.

Voor het bereiken van dit resultaat, is het voldoende te eisen:

òf het (k, j) element van N'_{47} nul is
 òf het $(j, 1)$ element van N_{48} nul is,

waarin j iedere waarde $j = 1, \dots, r$ aanneemt, met r het aantal rijen van L_4 ;

en l alle waarden aanneemt die corresponderen met de rij-nummers in i_8 van de verbreekcontacten. Als wij in het netwerk alle energie-bronsterkten nul stellen, dan kunnen wij de corresponderende kolommen van N_{48} verwijderen. De voorwaarden betekenen dan, dat in het zo ontstane bronloos netwerk, er geldt voor rij j van

$$\begin{bmatrix} N_{47} & N_{48} \end{bmatrix}, \text{ met } j = 1, \dots, r:$$

òf het element in kolom k van N_{47} nul is, òf de hele rij van \bar{N}_{48} nul is. Met de notatie \bar{N}_{48} duiden wij de matrix aan die uit N_{48} ontstaat door het verwijderen van die kolommen welke aan de energiebrontakken corresponderen. Derhalve betekent de voorwaarde, dat in het bronloze netwerk, het element van rij k van i_7 continu is, indien de desbetreffende spoel niet in een snede voorkomt die ook verbreekcontacten bevat.

Hiermede is het eerste deel van de continuïteitsstelling bewezen. Het tweede deel volgt, door precies duale beschouwingen op de matrix $N_{25} C_5 N'_{15}$.

Een andere manier om hetzelfde resultaat te bewijzen, is als volgt. Wij rangschikken de takken $\{c_5\}$ zodanig dat de eerste k kolommen van

$$\begin{bmatrix} N_{15} \\ N_{25} \end{bmatrix} \quad (\text{zie blz.101})$$

uitsluitend betrekking hebben op condensatoren die in lussen voorkomen, die naast boomtakcondensatoren en spanningsbronnen ook maakcontacten bevatten. De overige l kolommen van $\{c_5\}$ hebben betrekking op condensatoren die uitsluitend in lussen bestaande uit boomtakcondensatoren en spanningsbronnen voorkomen. Dit betekent dat wij

$$\begin{bmatrix} -N_{15} & -N_{25} \end{bmatrix} \quad (\text{zie blz.103}) \text{ in blokmatrices als volgt kunnen opdelen:}$$

$$\begin{bmatrix} -N_{15,k} & -N_{25,k} \\ 0 & -N_{26,1} \end{bmatrix}.$$

Met een overeenkomstige opdeling van de matrix C_5 , vinden wij

$$N_{25} C_5 N'_{15} = \begin{bmatrix} N_{25,k} & N_{26,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{5,k} & 0 \\ 0 & C_{5,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N'_{15,k} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} N_{25,k} C_{5,k} N'_{15,k} & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} k \\ 1 \end{matrix}$$

Wij kunnen dan zeggen, dat alle elementen van de verzameling $\{1\} \cap \{k,1\}$ van rijen van \underline{u}_2 continu zijn. Dit zijn juist die condensatorspanningen die in basislussen zonder maakcontacten voorkomen.

Wel moeten wij opmerken dat wij in beide bewijzen slechts bewezen hebben dat elementen van \underline{i}_7 of \underline{u}_2 continu zijn, indien aan de voorwaarden is voldaan. Maar uit (6) en (7) op blz.104 volgt ook de continuïteit van elementen van \underline{i}_4 en \underline{u}_5 indien deze vergelijkingen geen discontinue termen bevatten. Hiervoor is het voldoende dat de verbreekcontacten niet tot sneden behoren, die verder uitsluitend spoelen bevatten bij nul-zijnde energiebronsterkten.

Men lette wel op dat de voorwaarden die hier afgeleid zijn, slechts voldoende zijn. Wanneer niet aan de voorwaarden wordt voldaan, is het niet noodzakelijk dat de desbetreffende spoelstromen of condensatorspanningen discontinu zijn. De continuïteit in zo'n geval hangt niet alleen van de topologie maar ook van de bronsterkten en beginvoorwaarden af. In het algemeen is de continuïteit dan alleen te bepalen d.m.v. een complete oplossing van de toestandsvergelijkingen op $t = 0^+$.

VIII.13. Slotopmerkingen.

De laplace-transformatie is een zeer nuttige methode in bepaalde situaties. In het bijzonder verschaft die een directe methode om de beginvoorwaarden op de juiste manier in te voeren. Een nadeel echter is de noodzaak een rationale functie in partiële breuken te splitsen, voordat tot terugtransformatie naar het tijdgebied kan worden overgegaan. (Het ontbinden van de noemerpolynoom in zijn factoren is een karwei dat in alle methoden voorkomt en dus niet te vermijden is).

Verder kan bij meer ingewikkelde tijdfuncties dan de hier beschouwde - en dat zijn de meeste tijdfuncties - de laplace-integraal alleen

numeriek voor vaste waarden van s worden berekend. Weliswaar kunnen soms moderne numerieke methoden zoals de z.g. "fast Fourier-transform" uitkomst bieden, maar in het algemeen is men aangewezen op rechtstreekse berekening in het tijdgebied. Dit is zeker het geval voor alle, behalve de eenvoudigste, lineaire tijdafhankelijke systemen en voor constante netwerken waar er herhaaldelijk, maar op onregelmatige tijdstippen, wordt geschakeld.

In het geval van niet-lineaire systemen is de Laplace-transformatie zelfs schadelijk, in die zin dat iemand, die niet geleerd heeft dat deze methode aan heel wat beperkingen onderhevig is, hierdoor op een totaal verkeerd spoor wordt gebracht. De gevolgen kunnen verstrekkend zijn en o.a. inhouden dat een essentieel stuk fysisch inzicht geheel niet tot ontwikkeling komt.

IX. PASSIEVE RECIPROKE N-POORTNETWERKEN

IX.1. Wij bestudeerden in de hoofdstukken II, III en VI netwerken opgebouwd uit bronnen, impedanties en transformatoren in graph-theoretisch verband en wij formuleerden daar algemene oplossingen.

Het is niet steeds nodig of gewenst de eigenschappen van een netwerk op een dergelijke algemene wijze te analyseren. Vaak voeren de minder algemene methoden sneller tot de gewenste resultaten. Eenvoudige voorbeelden zijn in E.N.I. te vinden.

Als men bv. de spanningsoverdracht in een tweepoortnetwerk wil bepalen en deze kan worden gevonden d.m.v. de methode van spanningsdeling, zou het zeer omslachtig zijn eerst de gehele procedure van de toestandsvergelijkingen erbij te halen en het rekenproces uit te voeren.

Wij doen hierbij geen afbraak aan de algemene methoden; waar het om gaat is de meest geschikte methode te kiezen onder de geldende omstandigheden. Algemene methoden zijn het meest geschikt wanneer wij algemene eigenschappen van een netwerk willen afleiden, òf wanneer het netwerk geen bijzondere structurele eigenschappen heeft - zoals een ladder- of brugnetwerk -, die in de berekening uitgebuit kunnen worden.

Iets dergelijks doet zich bij computerprogrammering voor, en dan niet alleen bij netwerkproblemen. Men kan een zeer algemeen programma opstellen dat geschikt is voor een zeer brede klasse problemen, de gegevens zonder veel denkwerk in de computer stoppen en wachten tot de oplossing verschijnt. Maar de prijs die daarvoor moet worden betaald is vaak veel kostbare rekentijd of geheugenruimte, of numerieke onnauwkeurigheid. Iedere situatie moet op haar merites worden beoordeeld.

In dit hoofdstuk beschouwen wij enkele speciale methoden, die vooral geschikt zijn wanneer het netwerk kan worden beschouwd als opgebouwd uit deelnetwerken welke onderling met een betrekkelijk klein aantal verbindingsdraden zijn verbonden.

Wij beschouwen n-poortnetwerken, die uitsluitend zijn opgebouwd uit weerstanden, spoelen, condensatoren, transformatoren.

Dergelijke netwerken zijn passief (zie E.N.I., VII.10). Zie fig.127.

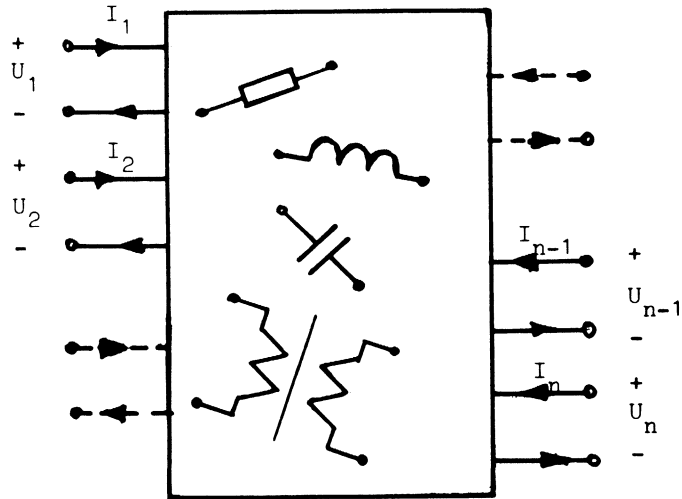


fig.127

Wij nemen aan dat alle spanningen en stromen van de vorm

$$u = Ue^{\lambda t} \quad \text{resp.} \quad i = Ie^{\lambda t} \quad \text{zijn.}$$

Indien stroombronnen worden aangesloten op de n poorten van een dergelijk netwerk en wanneer het aldus gevormde netwerk een oplossing heeft, kunnen de spanningen over deze bronnen (de poortspanningen) worden uitgedrukt in die bronsterkten (de poortstromen).

Als \mathbf{I} de kolomvector van de poortstromen is en \mathbf{U} de kolomvector van de poortspanningen, dan geldt

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \mathbf{I}, \quad (\text{of } \mathbf{I} = \mathbf{Y} \mathbf{U})$$

Hierin heet \mathbf{Z} de n -poort-impedantiematrix. \mathbf{Y} wordt de n -poort-admittantiematrix genoemd.

Er geldt $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$ en $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$, als \mathbf{Z} , resp. \mathbf{Y} niet-singulier zijn.

N.B. Voordat men over een poortimittantie-matrix mag praten is het essentieel dat aan de poortvoorwaarde is voldaan (E.N.I., hoofdstuk VII.3.) Door het aansluiten van stroombronnen aan de poorten is hieraan automatisch voldaan.

IX.2. Reciprociteit.

IX.2.1. In het college E.N.I., kwam in hoofdstuk II.2.2. de reciprociteit ter sprake. Uit dat college valt af te leiden dat weerstanden, spoelen, condensatoren en transformatoren reciproke elementen zijn. Wij bezien nu de reciprociteit van n-poortnetwerken, opgebouwd uit deze elementen, nader.

Wij geven in dit hoofdstuk de vectoren van alle (exponentiële) poortspanningen en poortstromen aan met \underline{U} resp. \underline{I} . De spanningen over de elementen binnen in het netwerk geven wij aan met \tilde{U} ; de vector van alle corresponderende stromen door die elementen is \tilde{I} , en waarbij voor iedere tak in het netwerk de positieve spanningspolariteit en stroomrichting zodanig zijn gekozen dat de tak vermogen opneemt wanneer $u(t) i(t) > 0$ is.

(Zie E.N.I. hoofdstuk I.5. en I.6.).

Wij beschouwen verder twee "toestanden" van het netwerk, die wij aangeven met p en q.

Opmerking: In de voorgaande hoofdstukken is het woord toestand gebruikt met betrekking tot een verzameling gegevens waarmee het toekomstige gedrag van het netwerk kan worden bepaald. Dit geldt ook hier met dien verstande dat wij hier het oog hebben op een speciale vorm van toestand nl. een verzameling van (exponentiële) spanningen en stromen, zodanig, dat aan alle netwerkvergelijkingen is voldaan.

De stelsels $\begin{bmatrix} U'_p \\ \tilde{U}'_p \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} U'_q \\ \tilde{U}'_q \end{bmatrix}$ voldoen elk aan de spanningswet van Kirchhoff.

Evenzo voldoen de stelsels

$$\begin{bmatrix} -I'_p \\ \tilde{I}'_p \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} -I'_q \\ \tilde{I}'_q \end{bmatrix} \text{ elk aan de stroomwet van Kirchhoff.}$$

Derhalve kan volgens de stelling van Tellegen vóór alle variabelen te zamen (inwendig zowel als uitwendig) worden geschreven

$$-U'_p I_q + \tilde{U}'_p \tilde{I}_q = 0 \quad (1)$$

$$-U'_q I_p + \tilde{U}'_q \tilde{I}_p = 0. \quad (2)$$

Wij zullen nu uit deze vorm van de stelling van Tellegen de reciproci-

teitsvoorwaarde voor de hier beschouwde klasse van n-poortnetwerken:

$$\underline{U}'_p \underline{I}_q = \underline{U}'_q \underline{I}_p, \quad (3)$$

afleiden.

Vraag: Waarom komen er in de betrekkingen (1) en (2) min-tekens voor?

IX.2.2. Daartoe verdelen wij allereerst de inwendige takken van het netwerk in twee categorieën.

- de transformator-takken (m-poorten) met spanningen en stromen die wij $\tilde{\underline{U}}$ resp. $\tilde{\underline{I}}$ noemen.
- de impedantie-takken met spanningen en stromen waarvoor wij $\underline{\tilde{U}}$ en $\underline{\tilde{I}}$ zullen gebruiken.

a) Voor alle inwendige transformator-stromen geldt volgens hoofdstuk III:

$$\begin{bmatrix} 1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{1q} \\ \tilde{I}_{2q} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \tilde{I}_{1q} = -N_2 \tilde{I}_{2q}.$$

Evenzo volgt $\tilde{U}_{2p} = N'_2 \tilde{U}_{1p}.$

Dus $\tilde{\underline{U}}'_p \tilde{\underline{I}}_q = \tilde{\underline{U}}'_{1p} \tilde{\underline{I}}_{1q} + \tilde{\underline{U}}'_{2p} \tilde{\underline{I}}_{2q} = -\tilde{\underline{U}}'_{1p} N_2 \tilde{\underline{I}}_{2q} + \tilde{\underline{U}}'_{1p} N_2 \tilde{\underline{I}}_{2q}$ zodat $\tilde{\underline{U}}'_p \tilde{\underline{I}}_q = 0.$ (4)

Ook geldt $\underline{\tilde{U}}'_q \underline{\tilde{I}}_p = 0.$

b) Bezien wij vervolgens de impedantie-takken in het inwendige van het netwerk, dan geldt daarvoor:

$$\underline{\tilde{U}} = \underline{\tilde{Z}} \underline{\tilde{I}}. \quad (5)$$

Het is $\underline{\tilde{Z}}$ duidelijk dat $\underline{\tilde{Z}}$ diagonaal is, zodat $\underline{\tilde{Z}} = \underline{\tilde{Z}}'.$

N.B.: $\underline{\tilde{Z}}$ heeft betrekking op inwendige takken, $\underline{\tilde{Z}}'$ heeft betrekking op de poorten.

Nu kunnen (1) en (2) worden geschreven als

$$-\underline{U}'_p \underline{I}_q + \underline{\tilde{U}}'_p \underline{\tilde{I}}_q + \underline{\tilde{U}}'_p \underline{\tilde{I}}_q = 0. \quad (6)$$

$$-\underline{U}'_q \underline{I}_p + \underline{\tilde{U}}'_q \underline{\tilde{I}}_p + \underline{\tilde{U}}'_q \underline{\tilde{I}}_p = 0. \quad (7)$$

Uit (5) volgt:

$$\begin{aligned} \tilde{U}'_p \tilde{I}'_q &= \tilde{I}'_p \tilde{Z}' \tilde{I}'_q && \text{of met } \tilde{Z}' = \tilde{Z}, \\ \tilde{U}'_p \tilde{I}'_q &= \tilde{I}'_p \tilde{Z} \tilde{I}'_q = \tilde{I}'_p \tilde{U}'_q = \tilde{U}'_q \tilde{I}'_p. \end{aligned} \quad (8)$$

De laatste gelijkheid geldt doordat een scalaire grootheid ongewijzigd blijft onder transpositie.

Substitutie van (4) en (8) in (6) en (7) levert

$$U'_p I'_q = \tilde{U}'_p \tilde{I}'_q = \tilde{I}'_p \tilde{U}'_q = U'_q I'_p = I'_p U'_q. \quad \text{q.e.d.} \quad (9)$$

Wij noemen deze relatie de algemene reciprociteits-voorwaarde.

Netwerken die aan deze voorwaarde voldoen heten reciprook. Netwerken opgebouwd uit weerstanden, spoelen, condensatoren en transformatoren zijn dus reciproke netwerken.

IX.2.3. Indien de poort-impedantiematrix Z bestaat, geldt

$$U_p = Z I_p \quad \text{en} \quad U_q = Z I_q.$$

Substitutie in (9) geeft

$$I'_p Z' I'_q = I'_p Z I'_q.$$

Dit geldt voor alle I_p en I_q zodat

$$Z' = Z. \quad (10)$$

Met andere woorden, de n-poort-impedantiematrix is symmetrisch. In deze afgeleide vorm zullen we de reciprociteit van n-poort netwerken zeer vaak tegenkomen.

Opmerkingen:

1. Indien van een n-poort de poortimpedantiematrix niet bestaat, maar wel de poortadmittantiematrix, is een afgeleid reciprociteitscriterium $Y' = Y$, hetgeen analoog te bewijzen is als (10).
2. Indien van een n-poort netwerk n doch Z noch Y bestaat, moet voor de reciprociteit worden uitgegaan van de algemene betrekking (3). Hiermee kunnen andere afgeleide criteria worden gegeven. (Zie hoofdstuk IX.6.4. en IX.9.4.).
3. Soms komt men in de literatuur nog tegen de benaming reciproke impedan-

ties, waarbij wordt bedoeld twee impedanties, die voldoen aan:

$$Z_1 = R^2 Y_2, \quad (R, \text{reëel}).$$

Een betere benaming voor twee dergelijke impedanties is inverse impedanties.

Vragen:

1. Geldt $\mathbb{U}'\mathbb{I} = 0$, waarin \mathbb{U} en \mathbb{I} poortgrootheden zijn?
2. Geldt de relatie $Z' = Z$ ook als wij negatieve elementwaarden toelaten?
3. Netwerken met gyratoren (niet-reciprook) kunnen soms toch reciprook zijn. Geef daarvan een voorbeeld.

Interreciprociteit

Stel dat wij twee verschillende netwerken hebben met overigens gelijke topologische configuraties. Het ene netwerk bevindt zich in een toestand, die wij aanduiden met p ; bij het andere netwerk hoort een toestand q . Wanneer voor de poortvariabelen van beide netwerken de gelijkheid (3) geldt, dus

$$\mathbb{U}'_p \mathbb{I}_q = \mathbb{U}'_q \mathbb{I}_p,$$

noemt men deze netwerken interreciprook.

Merk op dat de gelijkheid (3) hiervoor betrekking had op één netwerk, terwijl deze hier betrekking heeft op twee verschillende netwerken.

Reciprociteit is dus een bijzonder geval van interreciprociteit.

Opgave:

Onderzoek of twee gyratoren met gyratieweerstand R , resp. $-R$ interreciproke netwerken zijn of niet.

Geef een regel voor het construeren uit een gegeven passief netwerk van een corresponderend interreciprook netwerk.

Kunt u deze regel uitbreiden voor het geval dat het netwerk ook transactoren bevat?

literatuur: J.L. Bordewijk, Appl.Sc.Res. B, 6, pp.1-79, 1956.

IX.3. De impedantiematrix Z van een n -poortnetwerk.

Als illustratie van het gebruik van de Z -matrix beschouwen wij eerst het volgende.

IX.3.1. Voorbeeld

r poorten van een n-poortnetwerk worden afgesloten met impedanties, waardoor een m-poortnetwerk ($m = n - r$) ontstaat.

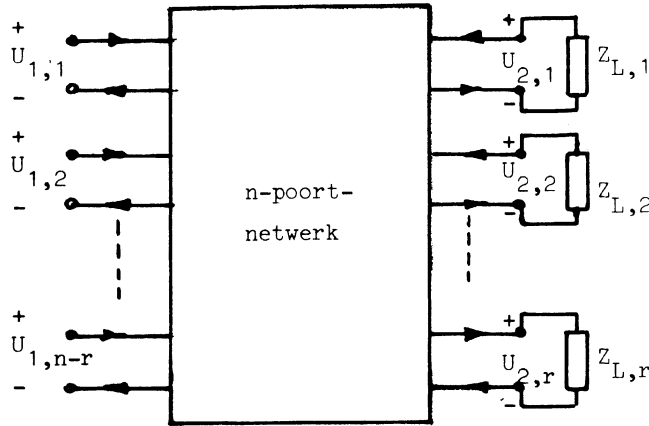


fig.128

Stel

$$U_1 = \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ \vdots \\ U_{1,n-r} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad U_2 = \begin{bmatrix} U_{2,1} \\ \vdots \\ U_{2,r} \end{bmatrix} \quad \text{met overeenkomstige uitdrukkingen voor } I_1 \text{ en } I_2.$$

Wij kunnen schrijven:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad U_2 = -Z_L I_2. \tag{11}$$

Hierin is Z_L een diagonale matrix van de afsluit-impedanties.

U_1 , I_1 en U_2 , I_2 zijn de poortspannings- en de poortstroommatrices van de orde n-r, resp. r.

Voor reciproke n-poorten is $Z_{12} = Z'_{21}$.

Uit (11) volgt:

$$U_1 = \left[Z_{11} - Z_{12} (Z_{22} + Z_L)^{-1} Z_{21} \right] I_1,$$

waarbij verondersteld is dat $(Z_{22} + Z_L)$ niet-singulier is.

IX.3.1.1. Een bijzonder geval van IX.3.1. is dat, waarbij de r-poorten zijn kortgesloten zodat $Z_L = 0$.

Dan is de (n-r)-poort impedantiematrix

$$Z_{11} - Z_{12} Z_{22}^{-1} Z_{21} \quad .$$

Op deze wijze kan men gemakkelijk de relaties, die gelden voor het (n-r)-poortnetwerk, afleiden uit de gegeven relaties van een n-poortnetwerk.

IX.3.1.2. Op overeenkomstige wijze volgen formules bij gebruik van de admittantiematrix. In het bijzonder als de r poorten open zijn, dan is de (n-r)-poort-admittantiematrix

$$Y_{11} - Y_{12} Y_{22}^{-1} Y_{21}, \quad \text{mits } Y_{22} \text{ niet-singulier is.}$$

Let wel: er is geen eenvoudig verband tussen Y_{22} en Z_{22} .

IX.3.2. Serieschakeling

Bij het in serie schakelen van éénpoorten (zie E.N.I., hoofdstuk I.9.1.) geldt dat de stroom door alle éénpoorten dezelfde is, terwijl de spanning over de serieschakeling gelijk is aan de som van alle poortspanningen. Wij kunnen dit beginsel generaliseren voor de serieschakeling van meerpoortnetwerken.

Voorbeeld: Wij beschouwen de serieschakeling van twee twee-poortnetwerken.

Zie fig.129.

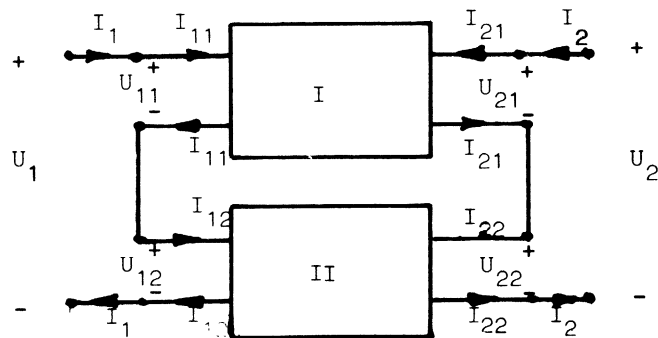


fig.129

Voor de linkerpoorten geldt $U_1 = U_{11} + U_{12}$ en

$$I_1 = I_{11} = I_{12}.$$

Wij zeggen dat deze poorten in serie geschakeld zijn. Een dergelijke beschouwing geldt ook voor de beide andere poorten.

Voor het tweepoortnetwerk I geldt:

$$\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^I & Z_{12}^I \\ Z_{21}^I & Z_{22}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{21} \end{bmatrix} = Z^I \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{21} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

en voor het tweepoortnetwerk II geldt:

$$\begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^{II} & Z_{12}^{II} \\ Z_{21}^{II} & Z_{22}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{22} \end{bmatrix} = Z^{II} \begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{22} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Voor de serieschakeling kan worden geschreven

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix}, \quad U = U_1 + U_2 \quad \text{en}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{22} \end{bmatrix}, \quad I = I_1 = I_2.$$

Hieruit volgt met (12) en (13):

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^I + Z^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad Z = Z^I + Z^{II}. \quad (14)$$

Conclusie: de impedantiematrix van twee seriegeschakelde tweepoortnetwerken is de som van de impedantiematrices van die tweepoortnetwerken.

Opmerkingen:

1. Dit resultaat is ook geldig voor de serieschakeling van n-poortnetwerken opgebouwd uit de passieve reciproke elementen en uit gyratoren en actieve

elementen, mits de Z -matrices bestaan en er aan de poortvoorwaarde wordt voldaan. Het is essentieel in de afleiding dat bij iedere poort van ieder deelnetwerk de algebraïsche som van de naar het deelnetwerk door de twee klemmen toevloeiende stromen nul is.

Een voldoende voorwaarde hiervoor is dat het klemmenpaar van iedere poort uitsluitend wordt verbonden met een transformatorwikkeling.

2. Poortvergelijkingen kunnen ook bij andere systemen dan netwerken worden toegepast, waarbij ook overeenkomstige resultaten gelden.

Kortheidshalve zullen wij voortaan ook schrijven n -poorten i.p.v. n -poortnetwerken, wanneer het niet belangrijk is welk type systeem in beschouwing wordt genomen mits het van poorten is voorzien.

IX.3.3. Het voorgaande resultaat kan worden uitgebreid tot het geval waarbij r -poorten van een n -poort in serie worden geschakeld met r -poorten van een m -poort waardoor een $(m + n - r)$ -poort ontstaat. Zie fig.130.

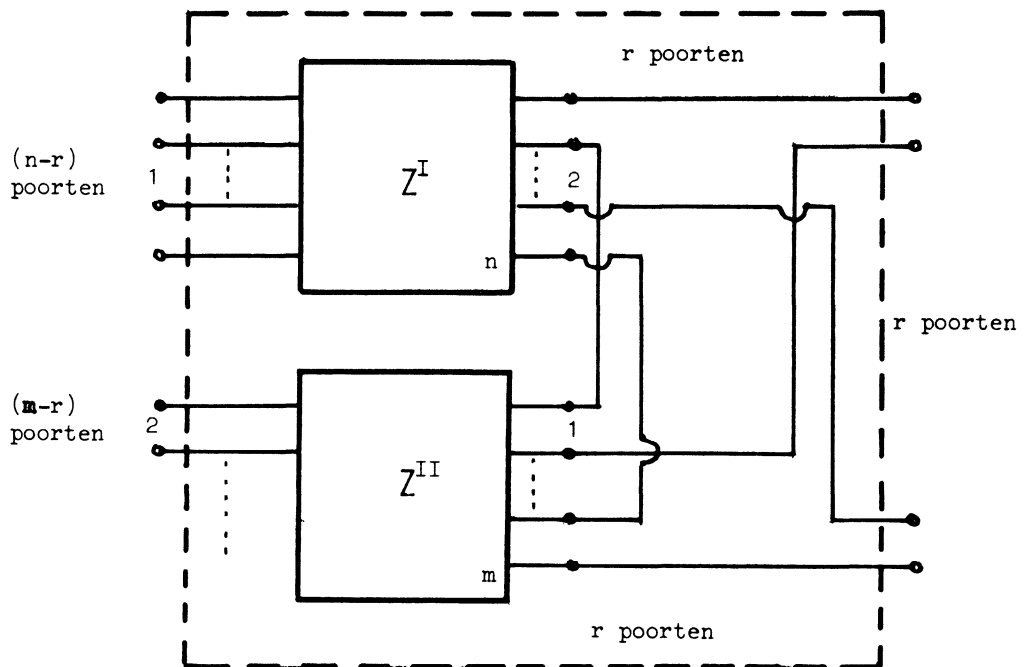


fig.130

Opdracht: Ga na dat als

$$Z_{(n)}^I = \begin{bmatrix} Z_{11}^I & Z_{12}^I \\ Z_{21}^I & Z_{22}^I \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow r \\ \downarrow r \end{matrix} \quad \text{en} \quad Z_{(m)}^{II} = \begin{bmatrix} Z_{11}^{II} & Z_{12}^{II} \\ Z_{21}^{II} & Z_{22}^{II} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow r \\ \downarrow r \end{matrix}$$

geldt:

$$Z_{(m+n-r)} = \begin{bmatrix} Z_{11}^I & Z_{12}^I & 0 \\ Z_{21}^I & Z_{22}^I + Z_{11}^{II} & Z_{12}^{II} \\ 0 & Z_{21}^{II} & Z_{22}^{II} \end{bmatrix}.$$

IX.3.4. Een andere uitbreiding van het resultaat van § 3.2 volgt door

in plaats van twee n-poorten, m n-poorten in serie te schakelen.

Dit proces kan als iteratie worden opgevat, waarbij eerst een nieuwe n poort

N_{12} wordt gemaakt door twee n-poorten N_1 en N_2 in serie te schakelen;

vervolgens wordt N_2 met een n-poort N_3 in serie geschakeld om een nieuwe n-poort N_{123} te vormen enz.

Mits de poortvoorwaarde geldt voor ieder deelnetwerk en iedere poort in het complete netwerk, voldoet de n-poort-impedantiematrix Z van het geheel aan

$$Z = \sum_{k=1}^m Z_k.$$

IX.4. De poortvoorwaarde.

Wij hebben steeds op het belang van de poortvoorwaarde gewezen.

Opdracht: Ga na, dat bij de serieschakeling van tweepoorten A en B als

in fig.131, men in strijd komt met de poortvoorwaarde zodat $Z \neq Z_A + Z_B$.

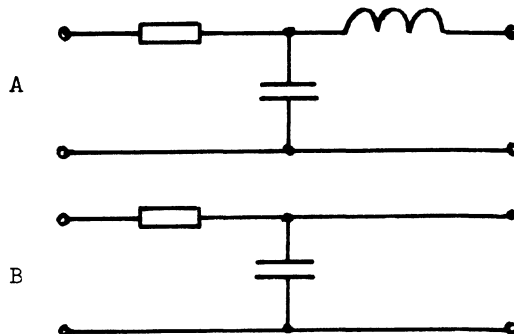


fig.131

Vraag: Hoe zou men de netwerken A en B van fig.131 moeten verbinden opdat wèl geldt

$$Z = Z_A + Z_B ?$$

IX.4.1. Als volgens het voorgaande serieschakeling van n-poorten niet kan gebeuren zònder dat het poortkarakter verloren gaat, kan de serieschakeling toch plaatsvinden indien men gebruik maakt van (ideale) transformatoren met $n = 1$. Zie fig.132.

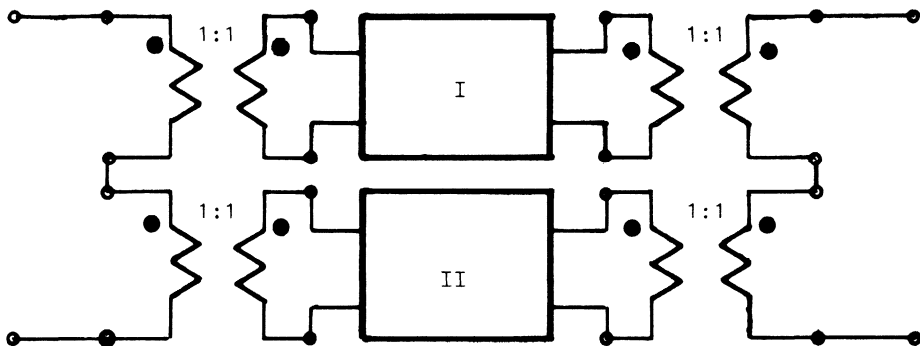


fig.132

Opdracht: Ga na dat nu aan de poortvoorwaarde is voldaan.

Vraag: Teken een schema met minder transformatoren terwijl toch aan de poortvoorwaarde is voldaan.

IX.5. De admittantie-matrix Y van een n-poort.

Ook de matrix Y is van nut, wanneer de poorten van verscheidene n-poortnetwerken moeten worden verbonden om zodoende een nieuw n-poortnetwerk te vormen.

IX.5.1. Parallelschakeling.

Bij het parallelschakelen van één-poorten (Zie E.N.I.§ I.9.2.) geldt, dat de spanning over alle één-poorten dezelfde is, terwijl de stroom door de gehele parallelschakeling gelijk is aan de som van alle poortstromen. Wij kunnen dit beginsel generaliseren voor de parallelschakeling van meerpoortnetwerken.

Voorbeeld: Wij beschouwen de parallelschakeling van twee tweepoortnetwerken.

Zie fig.133.

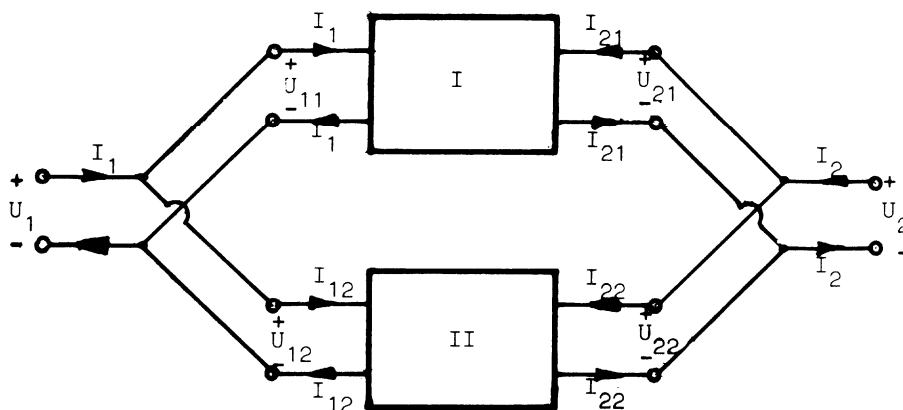


fig.133

Er geldt:

$$\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad U_1 = U_2 = U,$$

$$\begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad I_1 + I_2 = I;$$

met

$$\begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^I & Y_{12}^I \\ Y_{21}^I & Y_{22}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = Y^I \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} \quad \text{en}$$

$$\begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^{II} & Y_{12}^{II} \\ Y_{21}^{II} & Y_{22}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix} = Y^{II} \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix}$$

volgt $Y = Y^I + Y^{II}$.

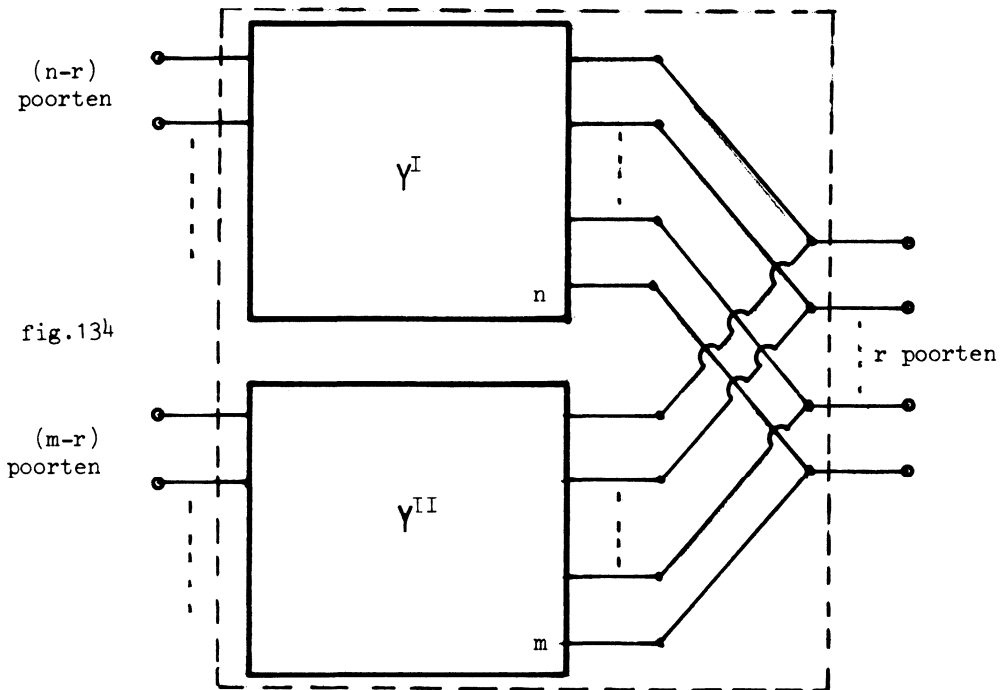
Een generalisatie tot parallelschakeling van m n-poorten leidt tot

$$Y = \sum_{k=1}^m Y_k.$$

Ook bij parallelschakelen kan men gebruik maken van ideale transformatoren, met transformatieverhouding 1 : 1 om ervoor te zorgen, dat aan de poortvoorwaarde overal voldaan wordt.

IX.5.2. Een tweede voorbeeld

r poorten van een n-poort worden parallel geschakeld met r poorten van een m-poort (zie fig.134) waardoor een (m + n - r)-poort ontstaat.



Opdracht: Geef analoge beschouwing als onder IX.3.3.

IX.6. De hybride-matrices H van een n-poort.

IX.6.1. De hybride-matrix H is van nut wanneer poorten van verscheidene n-poortnetwerken deels in serie, deels parallel moeten worden geschakeld. In fig.135 is de serie-parallel-schakeling voor twee twee-poorten getekend.

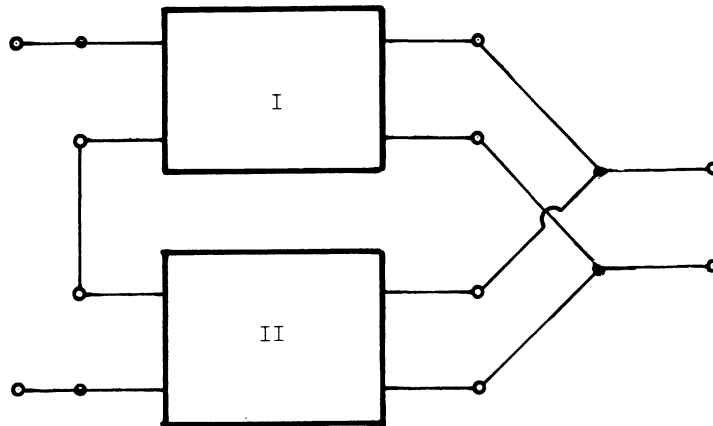


fig.135

De hybride-matrix wordt gedefinieerd door:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

De vectoren van de poortvariabelen worden elk gevormd met tweesoortige elementen U en I in tegenstelling tot de vergelijkingen bij de Z - en de Y -matrix.

Aangezien de sub-vectoren U_1 en I_2 van verschillende aantallen componenten kunnen worden samengesteld, zijn bij n -poortnetwerken ($n > 2$) verschillende hybride-matrices mogelijk.

Opdracht: Ga na, dat bij de serieparallelschakeling als in fig.135 geldt:

$$\begin{bmatrix} U_1^I \\ I_2^I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1^{II} \\ I_2^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{en}$$

$$\begin{bmatrix} I_1^I \\ U_2^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^{II} \\ U_2^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Leidt hiermee af $H = H_I + H_{II}$,

mits aan de poortvoorwaarden van het gehele netwerk wordt voldaan.

Opmerkingen:

1. De vraag of de hybride-matrix bestaat of niet is equivalent aan de vraag: als de poorten aangeduid met index 1 met stroombronnen worden afgesloten en de poorten aangeduid met index 2 met spanningsbronnen worden afgesloten, heeft het dan resulterende netwerkprobleem een eenduidige oplossing?
2. Als de verzameling van poorten met index 2 leeg is, is de H -matrix identiek met de Z -matrix. Is de verzameling van poorten met index 1 leeg, dan is de H -matrix identiek met de Y -matrix.
3. Afgezien van matrices die door rijen- en kolommenverwisselingen uit een gegeven matrix kunnen worden gegenereerd, zijn er voor een n -poort

$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$ verschillende H -matrices denkbaar, met inbegrip van de Z - en Y -matrices.

IX.6.2. Uitgaande van een bepaalde hybride-matrix kan men door rijen en kolommenverwisseling, gevolgd door verwisseling van de indices 1 en 2, een andere matrix G vormen.

Deze transformaties zijn als volgt:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_2 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{22} & H_{21} \\ H_{12} & H_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix},$$

waarin $\tilde{I}_1 = I_2$, $\tilde{U}_2 = U_1$, $\tilde{U}_1 = U_2$, $\tilde{I}_2 = I_1$.

Indien ook de hybride-matrix, complementair van (15) bestaat, zodat

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_1 \end{bmatrix} = \tilde{H} \begin{bmatrix} I_2 \\ U_1 \end{bmatrix},$$

dan is $\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{H}}^{-1}$ en $\mathbf{G}^{-1} = \tilde{\mathbf{H}}$.

Dit resultaat betekent dat de berekening van de inverse van een hybride-matrix kan worden uitgevoerd door rijen- en kolommenverwisseling toe te passen op de complementaire hybride-matrix, wanneer deze zich gemakkelijk op andere wijze laat berekenen.

De \mathbf{G} -matrix kan worden benut om de hybride-matrix van een parallel-serie-verbinding van n-poorten te berekenen. Zoals uit de hierboven ontwikkelde beschouwingen blijkt, is een parallel-serie-verbinding hetzelfde als een serie-parallel-verbinding met een andere indexering van de poortvariabelen.

IX.6.3. Een belangrijke eigenschap van hybride-matrices, die in het algemeen niet voor immittantie-matrices geldt, is vervat in de volgende

Stelling: Elk n-poortnetwerk, opgebouwd uit weerstanden, condensatoren, spoelen en transformatoren, bezit tenminste één hybride-matrix.

Bewijs: Het n-poort-netwerk N kan worden beschouwd als opgebouwd uit een niet-energetisch (n+p)-poortnetwerk N_0 waarvan p poorten met immittanties zijn afgesloten.

Het niet-energetisch (n+p)-poortnetwerk kan worden gekarakteriseerd door vergelijkingen van de vorm

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= -\mathbf{N}_2 \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{U}_2 &= \mathbf{N}_2' \mathbf{U}_1. \end{aligned} \quad (\text{zie hoofdstuk III})$$

Van de poortstromen van N, zullen er sommige zijn die zich onder de componenten van \mathbf{I}_2 bevinden. De bijbehorende poorten duiden wij aan met $\{\alpha\}$. De overige poortstromen van N bevinden zich dan onder de componenten van \mathbf{I}_1 . De poorten van N die hiermee corresponderen, duiden wij aan met $\{\beta\}$. Aan de poorten $\{\alpha\}$ verbinden wij stroombronnen en aan de poorten $\{\beta\}$ verbinden wij spanningsbronnen. Wij hebben dan een netwerk N_1 gevormd dat aan de voorwaarden voor oplosbaarheid voldoet (§ III.6.). Derhalve kunnen alle stromen en spanningen in de bronsterkten worden uitgedrukt.

In het bijzonder kunnen de spanningen van $\{\alpha\}$ en de stromen van $\{\beta\}$ worden uitgedrukt in de stromen van $\{\alpha\}$ en de spanningen van $\{\beta\}$, d.w.z. er bestaat een hybride-matrix, q.e.d. (N.B. Als $\{\alpha\}$ of $\{\beta\}$ leeg is, dan geldt opmerking 2, p.199).

IX.6.4. Reciprociteit

In tegenstelling tot de immittantie-matrices is de hybride-matrix van een reciprook netwerk niet symmetrisch.

Wel is symmetrisch een uit de \mathbf{H} -matrix afgeleide matrix:

$$\mathbf{H}_m \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ -\mathbf{H}_{21} & -\mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{is symmetrisch.}$$

Bewijs: Een reciproke n-poort voldoet aan:

$$\mathbf{I}'_{1a} \mathbf{U}_{1b} + \mathbf{I}'_{2a} \mathbf{U}_{2b} = \mathbf{I}'_{1b} \mathbf{U}_{1a} + \mathbf{I}'_{2b} \mathbf{U}_{2a},$$

waarin de \mathbf{I} en \mathbf{U} vectoren conform de partitionering van de \mathbf{H} -matrix zijn opgedeeld (indices 1 en 2).

De indices a en b duiden twee toestanden aan van de poortspanningen $\begin{bmatrix} \mathbf{U}'_1 & \mathbf{U}'_2 \end{bmatrix}$ en -stromen $\begin{bmatrix} \mathbf{I}'_1 & \mathbf{I}'_2 \end{bmatrix}$.

De reciprociteitsrelatie kan met

$$\mathbf{I}'_{2b} \mathbf{U}_{2a} = \mathbf{U}'_{2a} \mathbf{I}_{2b} \quad \text{en} \quad \mathbf{U}'_{2b} \mathbf{I}_{2a} = \mathbf{I}'_{2a} \mathbf{U}_{2b},$$

worden geschreven als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}'_{1a} & \mathbf{U}'_{2a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1b} \\ -\mathbf{I}_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}'_{1b} & \mathbf{U}'_{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1a} \\ -\mathbf{I}_{2a} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Nu is

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_m \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}.$$

Deze betrekking invullen in (16) levert:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}'_{1a} & \mathbf{U}'_{2a} \end{bmatrix} \mathbf{H}_m \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1b} \\ \mathbf{U}_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}'_{1b} & \mathbf{U}'_{2b} \end{bmatrix} \mathbf{H}_m \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1a} \\ \mathbf{U}_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}'_{1a} & \mathbf{U}'_{2a} \end{bmatrix} \mathbf{H}'_m \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1b} \\ \mathbf{U}_{2b} \end{bmatrix},$$

aangezien een scalar onveranderd blijft onder transpositie.

De laatste betrekking moet gelden voor alle I_1 en U_2 . Daar de toestanden a en b onafhankelijk zijn, is $H_m = H'_m$ de enige mogelijkheid.

q.e.d.

IX.6.5.

IX.6.5.1. De elementen van de hybridematrix zijn uit te drukken in de elementen van de impedantiematrix, respectievelijk admittantie-matrix.

$$\begin{aligned} \text{Voorbeeld: } U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ U_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2, \quad I_2 = Z_{22}^{-1}(U_2 - Z_{21}I_1), \end{aligned}$$

mits Z_{22} niet singulier is.

Substitutie van I_2 in de eerste vergelijking geeft:

$$U_1 = (Z_{11} - Z_{12}Z_{22}^{-1}Z_{21})I_1 + Z_{12}Z_{22}^{-1}U_2 \quad (17)$$

Herschrijven van de tweede vergelijking levert

$$I_2 = -Z_{22}^{-1}Z_{21}I_1 + Z_{22}^{-1}U_2. \quad (18)$$

IX.6.5.2. Op soortgelijke wijze volgt omgekeerd:

$$Z = \begin{bmatrix} H_{11} - H_{12}H_{22}^{-1}H_{21} & H_{12}H_{22}^{-1} \\ -H_{22}^{-1}H_{21} & H_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Opricht: Geef formules als (17) t/m (19) met gebruikmaking van de Y -matrix.

IX.7. De inverse van een matrix.

Bij de berekening van de inverse van een gegeven n -poortmatrix kan het vaak raadzaam zijn te werken met de sub-matrices van de gegeven matrix i.p.v. rechtstreeks met de elementen.

Wij illustreren dit rekenprocedé aan de hand van de Y - en Z -matrices.

$$\text{Gegeven: } Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}; \text{ bepaal } Z.$$

Oplossing: Als $I_2 = 0$, is $0 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2$

$$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2.$$

Eliminatie van U_2 geeft

$$I_1 = (Y_{11} - Y_{12}Y_{22}^{-1}Y_{21})U_1, \text{ mits } \det(Y_{22}) \neq 0.$$

Daar Z_{11} de coëfficiëntenmatrix van I_1 is in de uitdrukking voor U_1 wanneer $I_2 = 0$, volgt hieruit:

$$Z_{11} = (Y_{11} - Y_{12}Y_{22}^{-1}Y_{21})^{-1}, \text{ indien de te inverteren matrix niet}$$

singulier is.

Op overeenkomstige wijze vinden wij Z_{12} , Z_{21} en Z_{22} , uit de

betrekkingen $U_1 = Z_{12}I_2$ als $I_1 = 0$,

$$U_2 = Z_{21}I_1 \text{ als } I_2 = 0,$$

$$\text{en } U_2 = Z_{22}I_2 \text{ als } I_1 = 0.$$

$$Z = \begin{bmatrix} (Y_{11} - Y_{12}Y_{22}^{-1}Y_{21})^{-1} & (Y_{21} - Y_{22}Y_{12}^{-1}Y_{11})^{-1} \\ (Y_{12} - Y_{11}Y_{21}^{-1}Y_{22})^{-1} & (Y_{22} - Y_{21}Y_{11}^{-1}Y_{12})^{-1} \end{bmatrix} = Y^{-1}.$$

Hierbij geldt als voorwaarde dat alle te inverteren matrices niet-singulier zijn.

Opgave: Pas de gevonden formule toe op de inversie van

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

IX.8. De submatrices

De submatrices van

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

zijn de coëfficiënten in de vergelijkingen:

$$U_1 = Z_{11}I_1, \text{ als } I_2 = 0; \quad U_1 = Z_{12}I_2, \text{ als } I_1 = 0.$$

$$U_2 = Z_{21}I_1, \text{ als } I_2 = 0; \quad U_2 = Z_{22}I_2, \text{ als } I_1 = 0.$$

Beperken wij ons tot het voorbeeld van een tweepoort, dan geldt

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1(I_2=0)}, \quad Z_{12} = \frac{U_1}{I_2(I_1=0)}, \quad Z_{21} = \frac{U_2}{I_1(I_2=0)},$$

$$Z_{22} = \frac{U_2}{I_2(I_1=0)}.$$

Z_{11} is de aan poort 1 waargenomen impedantie als poort 2 open is ($I_2 = 0$), en heet de ingangsimpedantie. Evenzo heet Z_{22} de uitgangsimpedantie.

De elementen Z_{12} en Z_{21} zijn verhoudingen van een spanning en een stroom, die bij verschillende poorten behoren; zij worden overdrachtsimpedanties genoemd. Ook in het algemene geval ($n =$ willekeurig) geldt dat de elementen van Z , die niet op de hoofddiagonaal liggen, overdrachtsimpedanties heten.

In dat geval echter wordt de verhouding U_k/I_l door Z_{kl} bepaald onder de voorwaarde $I_r = 0$ voor $r = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$.

Ook kunnen wij spanningsoverdrachtsverhoudingen onder dezelfde omstandigheden definiëren. Bijvoorbeeld geldt voor een tweepoort:

$$\frac{U_2}{U_1} (I_2 = 0) = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}.$$

Voor de elementen van de Y -matrix van een tweepoort kan een analoge beschouwing worden gegeven. In dit geval is steeds $\delta f U_1 = 0$ of $U_2 = 0$,

d.w.z. dat de betreffende poort is kortgesloten.

Zo is Y_{12} de overdrachtsadmittantie van de tweepoort bij kortgesloten poort 1.

Verder kan men ook een stroomoverdrachtsverhouding I_k/I_1 bij kortgesloten poorten $r \neq 1$ definiëren.

Vragen: Is $Z_{11} = 1/Y_{11}$? Is $Z_{11} = 1/Y_{22}$? Is $Z_{12} = 1/Y_{12}$?

Wat is een correcte benaming voor de grootheden Y_{11} , $1/Y_{11}$?

Ook uit de hybride-matrices kunnen wij overdrachtsfuncties bepalen.

Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} H_{21} &= I_2/I_1 \quad (U_2 = 0) \\ &= Y_{21}/Y_{11}. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(stroomoverdrachtsverhouding bij kortgesloten} \\ \text{uitgang)} \end{array}$$

en

$$\begin{aligned} H_{22} &= I_2/U_2 \quad (I_1 = 0) \\ &= 1/Z_{22}. \end{aligned} \quad \text{(uitgangsadmittantie bij open ingang).}$$

IX.9. De ketting-matrix K .

IX.9.1. Een andere zeer belangrijke matrix is de kettingmatrix, aan te geven met K . Deze matrix kan alleen worden gebruikt bij netwerken met $2n$ poorten, dus een even nummer. Hiervoor beschouwen wij n poorten als "ingangspoorten" en de overige n poorten als "uitgangspoorten".

De matrix wordt gedefinieerd door:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} .$$

Let op het negatieve voorteken van I_2 .

De submatrices K_{11} en K_{22} geven aan de overdrachtsspanningsverhoudingen resp. de overdrachtsstroomverhoudingen bij open, resp. kortgesloten uitgangspoorten.

IX.9.2. De kettingmatrix wordt meestal gebruikt bij problemen waarin een cascade-(ketting-) schakeling van $2n$ -poortnetwerken voorkomt. (zie fig.136).

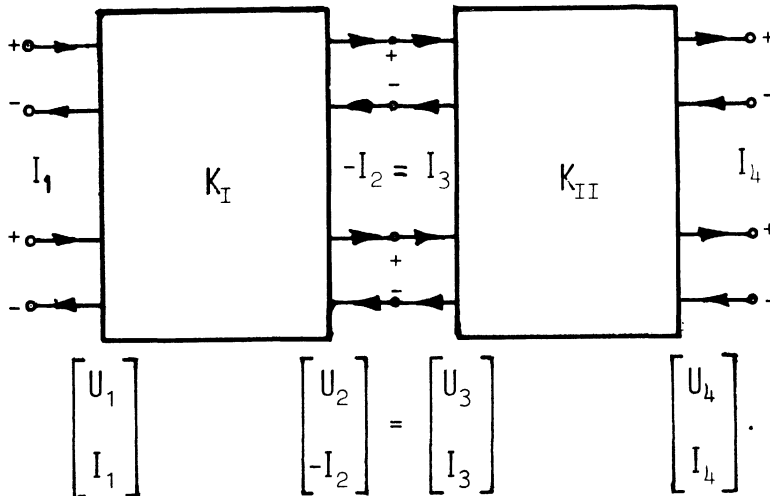


fig.136

Indien aan de poortvoorwaarde wordt voldaan, geldt, met

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = K_I \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} U_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = K_{II} \begin{bmatrix} U_4 \\ -I_4 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = K_I K_{II} \begin{bmatrix} U_4 \\ -I_4 \end{bmatrix},$$

zodat $K = K_I K_{II}$.

Voor p $2n$ -poortnetwerken in cascade geldt:

$$K = \prod_{k=1}^p K_k.$$

Opmerking: Uit de matrixalgebra is bekend dat i.h.a. $AB \neq BA$.

Deze eigenschap komt overeen met een in de elektrotechniek bekend feit: Als men een netwerk maakt uit een cascadeschakeling van een netwerk N_2 achter een netwerk N_1 , krijgt men een ander netwerk dan wanneer men N_1 achter N_2 schakelt.

Vragen: 1. Wat denkt u van de poortvoorwaarde bij in cascade geschakelde tweepoorten?

2. Bezit de ideale transformator een K , H , G of Y -matrix?

IX.9.3. Als het ook mogelijk is de uitgangsgrootheden in de ingangsgrootheden uit te drukken, dan bestaat de inverse van K .

Dus

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}.$$

Wij kunnen door een tekenwisseling van de stromen deze vergelijkingen ook schrijven in de vorm

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}.$$

Hierin is J de kettingmatrix die hoort bij het verwisselen van ingangs- en uitgangspoorten.

Opgave: Druk J uit in de elementen van K in het geval van een tweepoort.

IX.9.4. Reciprociteit.

Onder § IX.2.en § IX.6.4. vonden wij criteria voor de reciprociteit van netwerken als daarvan de Z -, Y - of resp. de H -matrix bekend was. Een dergelijk criterium voor de kettingmatrix van een reciproke n -poort blijkt te zijn

$$K'_{11}K_{22} - K'_{21}K_{12} = 1; \quad K'_{11}K_{21} \text{ en } K'_{12}K_{22} \text{ zijn symmetrisch.}$$

Bewijs:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ -K_{21} & -K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

De reciprociteitsvoorwaarde is

$$U'_a I_b = U'_b I_a, \text{ zie (3) met de toestanden a en b.}$$

$$\begin{aligned} \text{d.w.z. } U'_{1a} I_{1b} + U'_{2a} I_{2b} &= U'_{1b} I_{1a} + U'_{2b} I_{2a} \\ &= I'_{1a} U_{1b} + I'_{2a} U_{2b}. \end{aligned}$$

Herschrijven geeft

$$I'_{1a} U_{1b} - U'_{1a} I_{1b} = -I'_{2a} U_{2b} + U'_{2a} I_{2b}, \text{ of}$$

$$\begin{bmatrix} I'_{1a} & U'_{1a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1b} \\ -I_{1b} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I'_{2a} & U'_{2a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix}.$$

Substitutie geeft:

$$\begin{bmatrix} I'_{1a} & U'_{1a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ -K_{21} & -K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I'_{2a} & U'_{2a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix}.$$

Dit is een identiteit, die geldt voor alle U_{2b} en I_{2b} die, als de K -matrix bestaat, algebraïsch onderling onafhankelijk zijn.

Dus

$$\begin{bmatrix} I'_{1a} & U'_{1a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ -K_{21} & -K_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I'_{2a} & U'_{2a} \end{bmatrix}.$$

Transpositie geeft

$$- \begin{bmatrix} I_{2a} \\ U_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{11} & -K'_{21} \\ K'_{12} & -K'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1a} \\ U_{1a} \end{bmatrix}.$$

Opnieuw met (20) vinden we

$$- \begin{bmatrix} I_{2a} \\ U_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{11} & -K'_{21} \\ K'_{12} & -K'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_{22} & K_{21} \\ -K_{12} & K_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2a} \\ U_{2a} \end{bmatrix},$$

welke betrekking ook een identiteit is voor alle I_{2a} en U_{2a} , zodat

$$\begin{bmatrix} K'_{11} & -K'_{21} \\ K'_{12} & -K'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{22} & -K_{21} \\ K_{12} & -K_{11} \end{bmatrix} = 1. \quad (20a)$$

Uitwerken van het matrixproduct levert:

$$\begin{aligned} K'_{11} K_{22} - K'_{21} K_{12} &= 1 = K'_{22} K_{11} - K'_{12} K_{21} \\ -K'_{11} K_{21} + K'_{21} K_{11} &= 0 = K'_{12} K_{22} - K'_{22} K_{12} \end{aligned}$$

De twee eerste vergelijkingen zijn equivalent; de tweede volgt uit transitiviteit van de eerste. Bovendien, als aan de vergelijkingen voldaan wordt, gelden ook alle voorgaande resultaten, in het bijzonder de reciprociteit.

M.a.w. een stelsel nodige en voldoende voorwaarden opdat de n -poort, gekarakteriseerd door de ketting-matrix K , reciprook is,

is

$$K'_{11} K_{22} - K'_{21} K_{12} = 1 \tag{21}$$

$$K'_{11} K_{21} \quad \text{en} \quad K'_{12} K_{22} \quad \text{zijn symmetrisch.} \quad \text{q.e.d.}$$

In het bijzondere geval van een tweepoort zijn deze voorwaarden equivalent aan

$$\det K = 1.$$

Wij kunnen ons afvragen of deze voorwaarde aan de determinant ook algemeen geldt. Als dit het geval zou zijn, dan kan deze slechts een nodige voorwaarde zijn, daar één algebraïsche betrekking tussen de elementen van K nooit kan impliceren dat de $n^2 + n(n-1)$ onafhankelijke betrekkingen van (21) geldt, tenzij $n = 1$.

In de eerste plaats volgt uit (20a) door het nemen van de determinant van het matrixproduct dat

$$(-1)^n \det K \quad (-1)^{3n} \det K = 1,$$

d.w.z. $\det K = \pm 1$, zodat in elk geval de K -matrix van een reciprook $2n$ -poort niet singulier is.

Indien echter K_{21} niet-singulier is, kunnen wij bewijzen dat $\det K = +1$.

Beschouw nu het volgende matrix-product:

$$\begin{bmatrix} K'_{21} & -K'_{11} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}.$$

Uitgewerkt geeft dit:

$$\begin{bmatrix} K'_{21}K_{11} - K'_{11}K_{21} & K'_{21}K_{12} - K'_{11}K_{22} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

wegens (21).

Door het nemen van determinanten vinden wij

$$\det \begin{bmatrix} K'_{21} & -K'_{11} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \det K = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\det(K'_{21}) \det(K) = \det(K_{21}).$$

Daar $\det(A) = \det(A')$ volgt, mits $\det(K_2) \neq 0$,

$$\det(K) = 1.$$

Op overeenkomstige wijze kunnen wij ook hetzelfde resultaat vinden voor het geval dat K_{11} of K_{22} of K_{12} niet-singulier zijn. Als alle vier submatrices singulier zijn (maar K zelf is niet-singulier) is het nog een open vraag of $\det K = +1$ of niet.

Wel kunnen wij aantonen dat $\det K = +1$ voor elke reciproke 4-poort.

Opgave: Onderzoek of de 4-poort gegeven door de K -matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

reciprook is of niet. Is uw resultaat in overeenstemming met deze cursief gedrukte opmerkingen?

Opgave: Onderzoek of de transactoren (E.N.I., § 9.2.) de gyrator (E.N.I., § 9.6.), de N.I.C. en de N.I.I. (E.N.I., § 9.5.) reciprook zijn of niet.

IX.9.5. De kettngmatrix kan onder bepaalde voorwaarden worden uitgedrukt in de reeds bekende matrices.

Bijvoorbeeld:

$$K = \begin{bmatrix} -Y_{21}^{-1} Y_{22} & -Y_{21}^{-1} \\ Y_{12} - Y_{11} Y_{21}^{-1} Y_{22} & -Y_{11} Y_{21}^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{indien } \det(Y_{21}) \neq 0$$

en

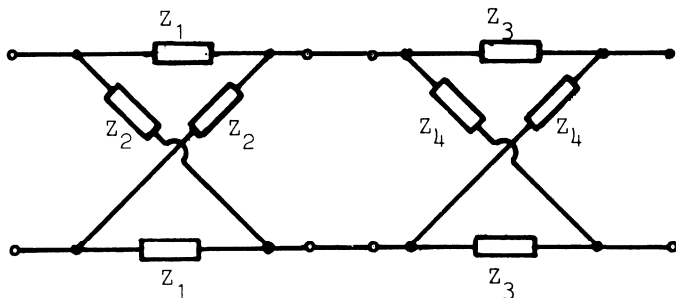
$$K = \begin{bmatrix} Z_{11} Z_{21}^{-1} & -Z_{12} + Z_{11} Z_{21}^{-1} Z_{22} \\ Z_{21}^{-1} & Z_{21}^{-1} Z_{22} \end{bmatrix} \quad \text{mits } \det(Z_{21}) \neq 0.$$

De reeds bekende matrices kunnen eveneens worden uitgedrukt in de kettngmatrix.

$$Z = \begin{bmatrix} K_{11} K_{21}^{-1} & K_{11} K_{21}^{-1} K_{22} - K_{12} \\ K_{21}^{-1} & K_{21}^{-1} K_{22} \end{bmatrix}.$$

Opgave: Toon aan, door gebruik te maken van de kettng- en de impedantiematrix dat de impedantiematrix van onderstaand netwerk is

$$\frac{1}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4) + 2Z_1 Z_2 & \frac{1}{2}(Z_1 - Z_2)(Z_3 - Z_4) \\ \frac{1}{2}(Z_1 - Z_2)(Z_3 - Z_4) & \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4) + 2Z_3 Z_4 \end{bmatrix}.$$



Verifieer dit resultaat door een berekening met uitsluitend gebruik van de impedantiematrix (Aanwijzing: Benut de symmetrie ten volle).

IX.10. Tellegen-polynomen

In het bijzondere geval van tweepoort-netwerken kunnen de elementen van alle matrices worden uitgedrukt in zes polynomen van de complexe frequentie: A, B, C, D, H en K.

Deze polynomen zijn in 1946 door B.D.H. Tellegen in de netwerktheorie ingevoerd en systematisch toegepast.

IX.10.1. Indien de Z -matrix bestaat, kunnen de polynomen als volgt worden gedefinieerd.

Laat de netwerkfuncties Z_{11} , Z_{22} , Z_{12} , Z_{21} , $Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ onder een gemeenschappelijke noemer C worden gebracht.

Dan worden de andere polynomen door de volgende relaties gedefinieerd.

$$Z_{11} = \frac{A}{C}, \quad Z_{22} = \frac{B}{C}, \quad Z_{12} = \frac{H-K}{C}, \quad Z_{21} = \frac{H+K}{C},$$

$$\det Z = \frac{D}{C}, \quad \text{dus } \bar{Z} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & H-K \\ H+K & B \end{bmatrix}$$

Dan geldt $AB - H^2 = CD - K^2$. (22)

Men lette op dat met deze definitie de polynomen niet eenduidig vast liggen, daar ook de polynomen ϕA , ϕB , ϕC , ϕD , ϕH en ϕK , waarin ϕ een polynoom is, aan dezelfde voorwaarden voldoen.

Wij komen in § IX.10.6 hierop terug waar een meer algemene definitie wordt gegeven.

IX.10.2. Wanneer de andere tweepoortmatrices bestaan, kunnen wij, aan de hand van de relaties voor de Z -matrix, deze ook in de zes polynomen uitdrukken.

$$Y = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} B & K-H \\ -(H+K) & A \end{bmatrix}, \quad H = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} D & H-K \\ -(H+K) & C \end{bmatrix},$$

$$G = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} C & K-H \\ K+H & D \end{bmatrix}, \quad K = \frac{1}{H+K} \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix},$$

$$J = \frac{1}{H-K} \begin{bmatrix} B & D \\ C & A \end{bmatrix}.$$

Verder kan men uitgaan van één van deze matrices en de polynomen definiëren door de elementen van de matrix en de determinant onder een gemeenschappelijke noemer te brengen. Daarna volgen de andere polynomen uit de matrix-elementen en de determinant te-zamen met de gemeenschappelijke noemer.

IX.10.3. Als één van de polynomen A , B , C , D identiek nul is, bestaan de G , respectievelijk H , Z , Y matrices niet.

Daar een netwerk, uitsluitend opgebouwd uit weerstanden, condensatoren, spoelen en transformatoren, tenminste een hybride matrix bezit, is tenminste één van de polynomen A , B , C , D niet identiek nul.

In het geval van actieve netwerken is het inderdaad mogelijk dat A , B , C , D nul zijn. Er bestaat dan alleen een kettingmatrix, zodat $U_1 = 0$, $I_1 = 0$ of $U_2 = 0$, $I_2 = 0$. Deze vergelijkingen beschrijven een nieuw netwerkelement dat nullor heet. Zo'n element kan goed worden benaderd door een moderne operationele versterker. Dan geldt in zo'n geval volgens (22), $H^2 = K^2$, zodat $H = \pm K$. Mits $H \neq 0$, bestaat dan K of J . Indien $H \equiv K \equiv 0$, dan is geen beschrijving van de tweepoort mogelijk. Zo'n geval heeft noch theoretische noch praktische betekenis.

IX.10.4. Als de tweepoort reciprook is, is $K \equiv 0$.

Wij zien dan dat (22) een minder symmetrische vorm aanneemt. Dit gebrek aan symmetrie van de fundamentele betrekking bij reciproke tweepoorten komt tot uiting in de gecompliceerdheid van de geavanceerde theorie van reciproke netwerken. Men wordt als het ware gestraft voor het niet aanvaarden van de gyrator. Dit is een nogal merkwaardig resultaat omdat men zou verwachten dat de reciprociteit en de daardoor ontstane symmetrie in de Z - en Y -matrices juist tot een vereenvoudiging zouden leiden. Wij komen op dit onderwerp in het vierde jaar terug.

IX.10.5. Het grote voordeel van het werken met de zes polynomen is dat elke lineaire tweepoort hiermede te beschrijven is, en de omzetting van één matrix in een andere is aan de hand van de voorgaande betrekkingen bijzonder eenvoudig. Voor de ideale transformator bijv. geldt $H = 1$, $K = 0$, $A = n$, $C = D = 0$, $B = 1/n$.

IX.10.6. Vrije trillingen.

Wij zullen nu een andere definitie van de Tellegen-polynomen geven, waarbij de dubbelzinnigheid met betrekking tot de graad en het wel of niet bestaan van een gemeenschappelijke factor ϕ wordt opgelost. Uit de Z -matrix leiden wij af

$$C \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & H-K \\ H+K & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Als de poorten open zijn, is $I_1 = I_2 = 0$. De enige mogelijkheid opdat U_1 en U_2 niet beide nul zijn, is dat $C = 0$.

De nulpunten van C geven dus de eigenfrequenties van de vrije trillingen onder de omstandigheid dat de poorten open zijn.

Wij gebruiken deze eigenschap nu als definitie:

C is een polynoom waarvan de nulpunten de eigenfrequenties van de vrije trillingen zijn bij open poorten.

De polynoom is nu bepaald op een constante vermenigvuldiger na.

Deze kan willekeurig gekozen worden, bijv. zodat de coëfficiënt van de hoogste macht van λ één is.

Op een dergelijke manier kunnen wij de nulpunten van de andere polynomen aan de hand van vrije trillingen vastleggen. (Zie ook de opmerking op blz. 225).

De voorwaarden zijn:

- A: poort 1 kortgesloten poort 2 open
 B: poort 1 open poort 2 kortgesloten
 D: poort 1 kortgesloten poort 2 kortgesloten.

Voor de polynomen H en K hebben wij geen eenvoudig middel de nulpunten uit de vrije trillingen te bepalen.

Echter met behulp van de nullor, welke goed kan worden benaderd door een operationele versterker, kunnen wij vrije trillingen opwekken met eigenfrequenties die met de nulpunten van $H-K$ respectievelijk $H+K$ overeenkomen. Deze resultaten worden samengevat in fig.137. a. en b.

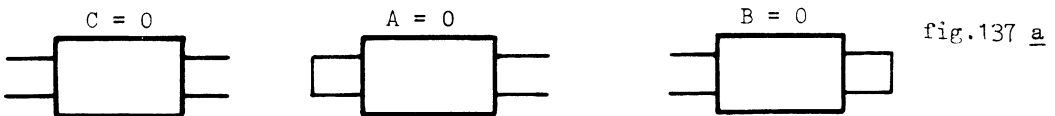
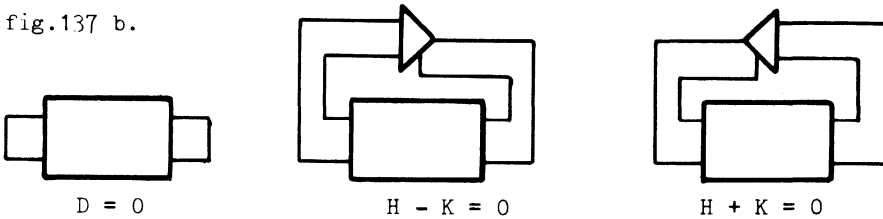
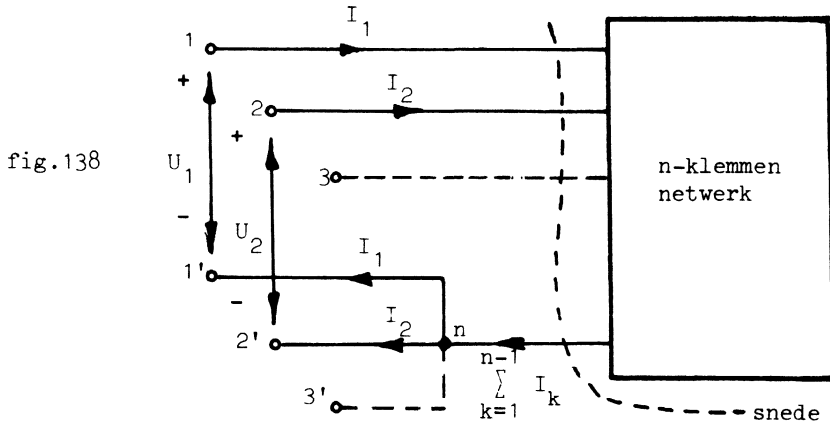


fig.137 b.



IX.11. Netwerken met n klemmen, waarvan één geaard is.

IX.11.1. Een bijzonder geval van een meerpoortnetwerk is dat, waarin één klem gemeenschappelijk is voor alle poorten. Zie fig.138.



Zo beschouwd is het n-klemmen netwerk een (n-1)-poortnetwerk. De aan alle poorten gemeenschappelijke klem kan met de aarde worden verbonden en heeft een potentiaal die als referentie voor het gehele netwerk kan dienen.

Een netwerk als in fig.138 kan altijd uit een gegeven willekeurig (n-1)-poortnetwerk worden verkregen door elke poort daarvan aan te sluiten op de secundaire van een ideale transformator (met transformatieverhouding $n = 1$) en dan van alle primaire transformatorpoorten één klem samen te voegen.

Een aldus beschouwd n-klemmen netwerk is een (n-1)-poort waarop alle beschouwingen, tot dusverre in dit hoofdstuk gegeven van toepassing zijn. Bij de cascade- of de parallelschakelingen van twee n-klemmennetwerken is hier steeds aan de poortvoorwaarde voldaan, zie bijv. fig.139.

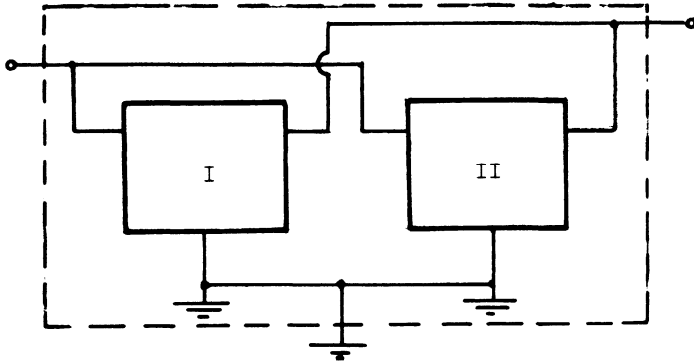


fig.139

De serieschakeling van twee n-poortnetwerken is in het geval van n-klemmen netwerken niet mogelijk zonder verlies van de poortstructuur.

Dit komt doordat in een serieschakeling wij een verbinding van poorten moeten maken zonder dat de poorten een lus vormen.

Daar door de gemeenschappelijke aarding de referentieklemmen van de twee netwerken reeds verbonden zijn, betekent dat elke andere verbinding van corresponderende klemmen tot vorming van een lus van poorten leidt.

Een verbinding zoals ac (fig.140) resulteert in de kortsluiting van poort bc. Een verbinding zoals cd betekent dat de poorten parallel zijn verbonden.

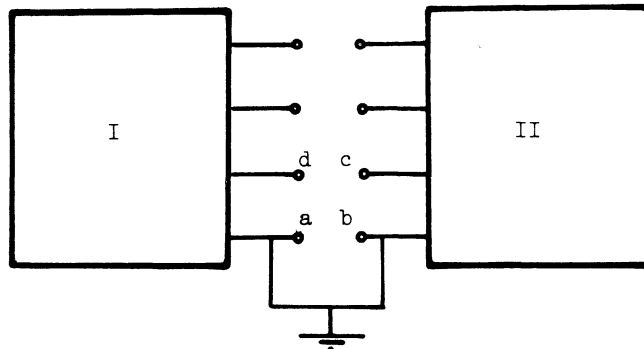


fig.140

De n-klemmennetwerken - en in het bijzonder de 3-klemmennetwerken - komt men in de praktijk zo vaak tegen, dat het nuttig is speciale immittantie-matrices voor deze netwerken te introduceren.

IX.11.2. De "onbepaalde"-admittantiematrix Y_{on} .

In fig.141 worden de eindpunten van de ster van n spanningsbronnen met de n klemmen van het netwerk verbonden.

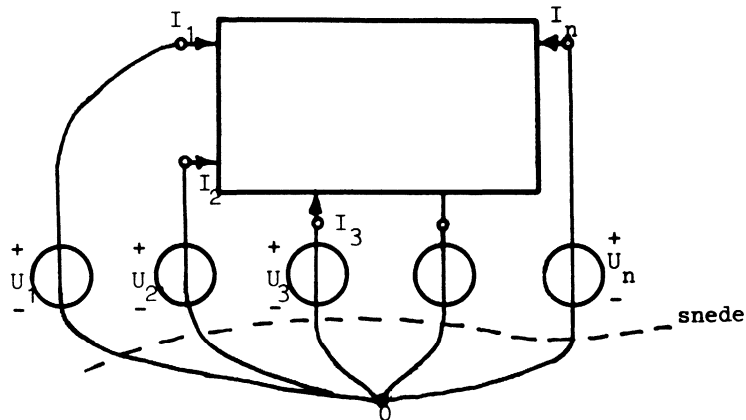


fig.141

Let op de gekozen positieve polariteiten en positieve stroomrichtingen. Wanneer het netwerkprobleem een eenduidige oplossing heeft, is:

$$I = Y_{on} U,$$

$$\text{met } I = [I_1 \ I_2 \ \dots \ I_n]' \quad \text{en} \quad U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n]'.$$

IX.11.2. 1. De stertakken vormen een snede zodat de som van alle klemstromen nul is.

Dus:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} I = 0, \quad \text{of wel}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} Y_{on} U = 0.$$

Het netwerkprobleem heeft een eenduidige oplossing voor elke willekeurig gekozen U . D.w.z. U mag willekeurig worden gekozen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} Y_{on} = 0.$$

Met andere woorden de som van de elementen van elke kolom van Y_{on} is gelijk aan nul.

IX.11.2. 2. Voor een reciprook netwerk is $Y'_{on} = Y_{on}$,

zodat ook de som van de elementen van elke rij nul is.

IX.11.2. 3. Voor niet-reciprooke netwerken geldt dat Y_{on} niet symmetrisch is maar wel geldt dat de som van de elementen van elke rij nul is. Omdat voor niet-reciprooke netwerken $Y_{on} \neq Y'_{on}$ geldt het bewijs onder IX.11.2.2. niet.

Het bewijs loopt als volgt:

Stel alle bronsterkten gelijk. Dan zijn de poortspanningen van het netwerk nul, zodat alle poortstromen en dus alle klemstromen nul zijn (zie fig. 141).

Dan wordt $0 = I = Y_{on} U$, $0 = Y_{on} [1 \ 1 \ \dots \ . \ . \ 1]' u_1$;

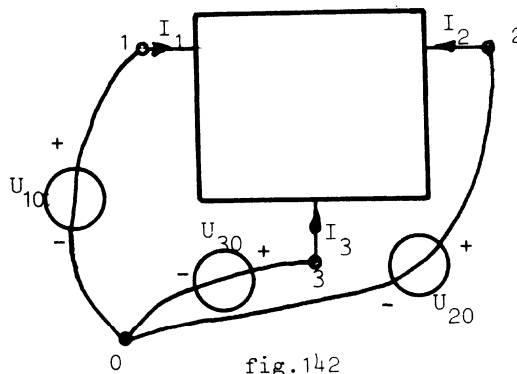
waarmee het bewijs geleverd is.

Het is mogelijk dat niet alle poortstromen nul zijn terwijl de poortspanningen wel nul zijn. Maar in zo'n geval bestaat de Y-matrix niet, of dit geldt alleen bij discrete complexe frequenties (eigenfrequenties). Deze conclusies zijn af te leiden uit de algemene lineaire vergelijking in de poortgrootheden

$$P U + Q I = 0.$$

IX.11.3. Als wij de sterkte van de bron, verbonden aan de referentieklem, gelijk nul stellen, hebben wij de normale situatie van een n-klemmennetwerk.

Voorbeeld 1:



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{bmatrix}, \quad \text{is } I = Y_{\text{on}} U.$$

Stel $U_{30} = 0$; dan geldt

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \\ Y_{31} & Y_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{13} \\ U_{23} \end{bmatrix}.$$

Noemen wij $U_{13} = U_1$ en $U_{23} = U_2$ en bedenken wij dat de laatste rij uit de matrix-betrekking afhankelijk is van de eerste 2, dan schrijven wij

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Fig.142 kan dan worden getekend als fig.143

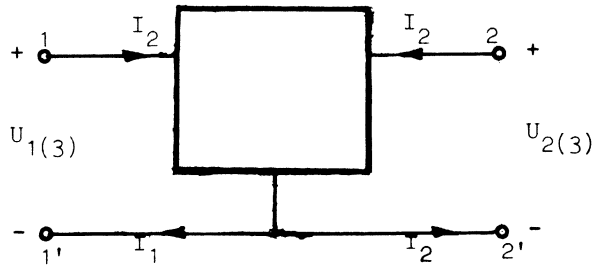


fig.143

Wij hebben door deze procedure (in feite het schrappen van de derde kolom en derde rij) een matrix-relatie gekregen als in §IX. 3.

Het aarden van klem k van een n -klemmen-netwerk betekent het schrappen van de k^{de} kolom en van de k^{de} rij in Y_{on} ; men vindt dan Y .

Opmerking: Het "onbepaalde" van Y_{on} is niet daarin gelegen, dat er één of meer elementen in die matrix niet bepaald zouden zijn, maar heeft betrekking op het feit dat de keus van de referentieklem nog onbepaald is.

Voorbeeld 2:

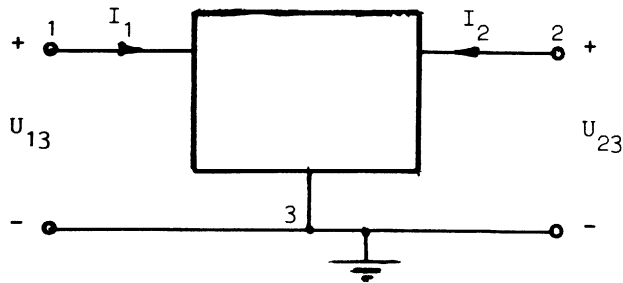


fig.144

Gegeven:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{13} \\ U_{23} \end{bmatrix}.$$

Men maakt de aarding los en aardt vervolgens klem 2.

Gevraagd: De relatie tussen de poortstromen en poortspanningen in de nieuwe situatie van het tweepoortnetwerk.

Oplossing: Voeg een rij en een kolom toe zodanig dat voldaan is aan de voorwaarden onder § IX.11.2.

$$Y_{\text{on}} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & -(Y_{11} + Y_{12}) \\ Y_{21} & Y_{22} & -(Y_{21} + Y_{22}) \\ -(Y_{11} + Y_{21}) & -(Y_{12} + Y_{22}) & (Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22}) \end{bmatrix}.$$

Nu is de aarding van klem 3 opgeheven. Het aarden van klem 2 leidt, na schrappen van rij 2 en kolom 2, tot:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & -(Y_{11} + Y_{12}) \\ -(Y_{11} + Y_{21}) & Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{32} \end{bmatrix}.$$

Opmerking: De onbepaalde admittantiematrix ontleent haar betekenis onder meer aan de souplesse waarmee men de nieuwe matrices vindt voor (n-1)-poort netwerken (afgeleid uit n-klemmennetwerken) als men een andere klem als referentie kiest (andere aarding).

Door toevoegen van een rij en een kolom aan de **gegeven matrix** (zodanig dat de som van rijelementen = 0 en de som van de kolomelementen = 0) en het vervolgens schrappen van een andere rij in de daarmee corresponderende kolom ontstaat de nieuwe **matrix**.

Vraag: Geldt de onder voorbeeld 2 gegeven berekening ook in het geval dat het netwerk van fig.144 niet reciprook is?

Voorbeeld 3: In het geval van een reciprook drieklemmennetwerk hebben wij:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix}$$

met $Y_{12} = Y_{21}$, $Y_{13} = Y_{31}$, $Y_{23} = Y_{32}$ (reciprociteit),

en $Y_{11} = -(Y_{12} + Y_{13})$, $Y_{22} = -(Y_{12} + Y_{23})$ en $Y_{33} = -(Y_{13} + Y_{23})$,

want de sommen van de rijen en de kolommen zijn nul.

Dit leidt tot het vervangingschema van fig.145, uitgedrukt in de drie overdrachtsadmittanties.

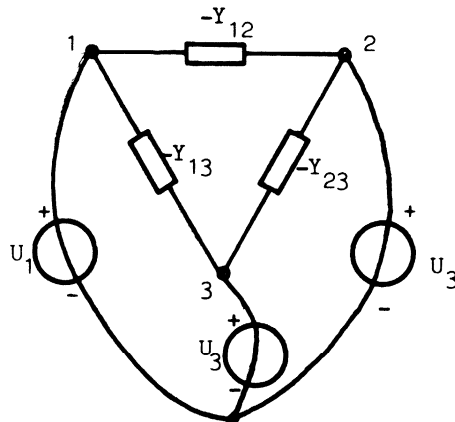


fig.145.

IX.11.4. Indien men veelvuldig berekeningen uitvoert aan drie-klemmen netwerken kunnen naast de reeds gedefinieerde Tellegen-polynomen (zie §IX.10.1) twee nieuwe polynomen F en G worden gedefinieerd.

Dit geldt alleen voor reciproke netwerken.

Men stelt $\frac{-F}{D} = Y_{23}$ en $\frac{-G}{D} = Y_{13}$.

Nog steeds geldt $Y_{12} = \frac{-H}{D}$ als wij klem 3 als gemeenschappelijk aan poorten 1 en 2 beschouwen (zie §IX.10.2).

Nu is

$$Y_{11} = \frac{B}{D} = \frac{G+H}{D}, \quad Y_{22} = \frac{A}{D} = \frac{H+F}{D} \quad \text{en} \quad Y_{33} = \frac{F+G}{D} = \frac{A+B-2H}{D}.$$

De relatie $AB - H^2 = CD$ impliceert

$$GH + HF + FG = CD.$$

Het driehoeksvervangingsschema kan in een ster worden omgezet.

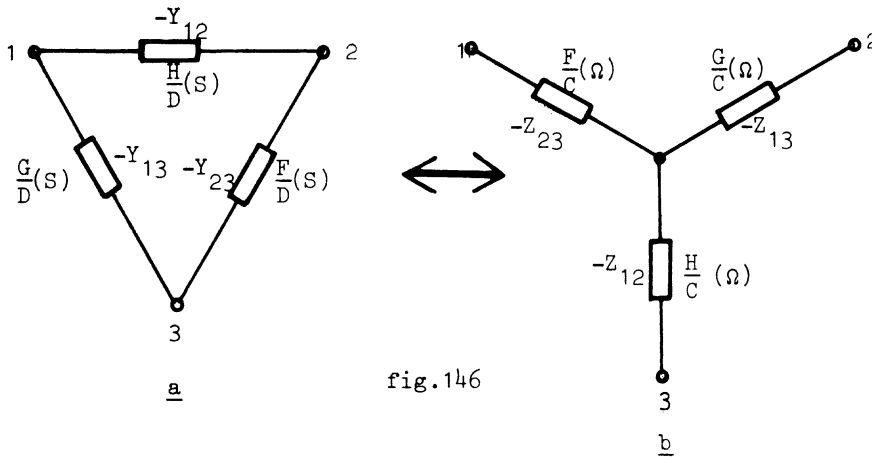


fig.146

Merk op dat in fig.146a admittanties (in S) worden gebruikt en in fig. 146b impedanties (in Ω).

N.B. De impedanties $-Z_{12}$ enz. moeten in verband met fig.147 worden gezien.

Opmerking: Men kan ook zonder de polynomen en fig.146 werken door in een concrete situatie op het beschouwde netwerkdeel de driehoek-stertransformatie of de ster-driehoekstransformatie (zie E.N.I. § 2.4.) toe te passen.

Voor twee parallelgeschakelde n-klemmennetwerken met resp.

$$\begin{aligned} Y_{\text{on}}^A \text{ en } Y_{\text{on}}^B \text{ geldt: } \quad I_1 &= Y_{\text{on}}^A U \\ I_2 &= Y_{\text{on}}^B U \\ I_1 + I_2 &= I. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } I = (Y_{\text{on}}^A + Y_{\text{on}}^B)U = Y_{\text{on}}U.$$

$$\text{Dus } Y_{\text{on}} = Y_{\text{on}}^A + Y_{\text{on}}^B.$$

Hierin is Y_{on} de onbepaalde admittantiematrix van het nieuwe n-klemmennetwerk.

IX.11.5. De onbepaalde impedantiematrix Z_{on} .

Voor n-klemmennetwerken kan een Z_{on} worden gedefinieerd analoog aan de definitie van Y_{on} .

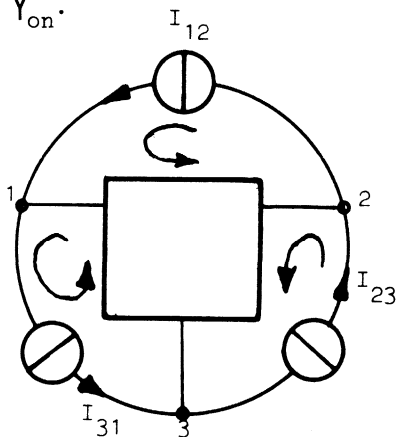


fig.147

Bijvoorbeeld voor een drieklemmennetwerk geldt

$$\begin{bmatrix} U_{23} \\ U_{31} \\ U_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{23} \\ I_{31} \\ I_{12} \end{bmatrix} = Z_{\text{on}} \begin{bmatrix} I_{23} \\ I_{31} \\ I_{12} \end{bmatrix}$$

of korter $\mathbf{U} = \mathbf{Z}_{\text{on}} \mathbf{I}$.

Volgens de spanningswet van Kirchhoff is $U_{23} + U_{31} + U_{12} = 0$.

Zodat $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{on}} = 0$. (vergelijk 11.2.1.).

Voor reciproke netwerken is $\mathbf{Z}_{\text{on}} = \mathbf{Z}'_{\text{on}}$, zodat ook geldt

$\mathbf{Z}_{\text{on}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}' = 0$. (vergelijk 11.2.2.).

Ook voor niet-reciproke n-klemmen-netwerken geldt dit laatste.

Immers kiezen wij $\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}'$ dan zijn de klemstromen nul en dientengevolge is $\mathbf{U} = 0$; ook dan volgt

$\mathbf{Z}_{\text{on}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}' = 0$. (vergelijk 11.2.3.).

Bij de serieschakeling van n-klemmen-netwerken met resp. $\mathbf{Z}_{\text{on}}^{\text{A}}$ en $\mathbf{Z}_{\text{on}}^{\text{B}}$

vindt men voor het nieuwe n-klemmen-netwerk

$$\mathbf{Z}_{\text{on}} = \mathbf{Z}_{\text{on}}^{\text{A}} + \mathbf{Z}_{\text{on}}^{\text{B}},$$

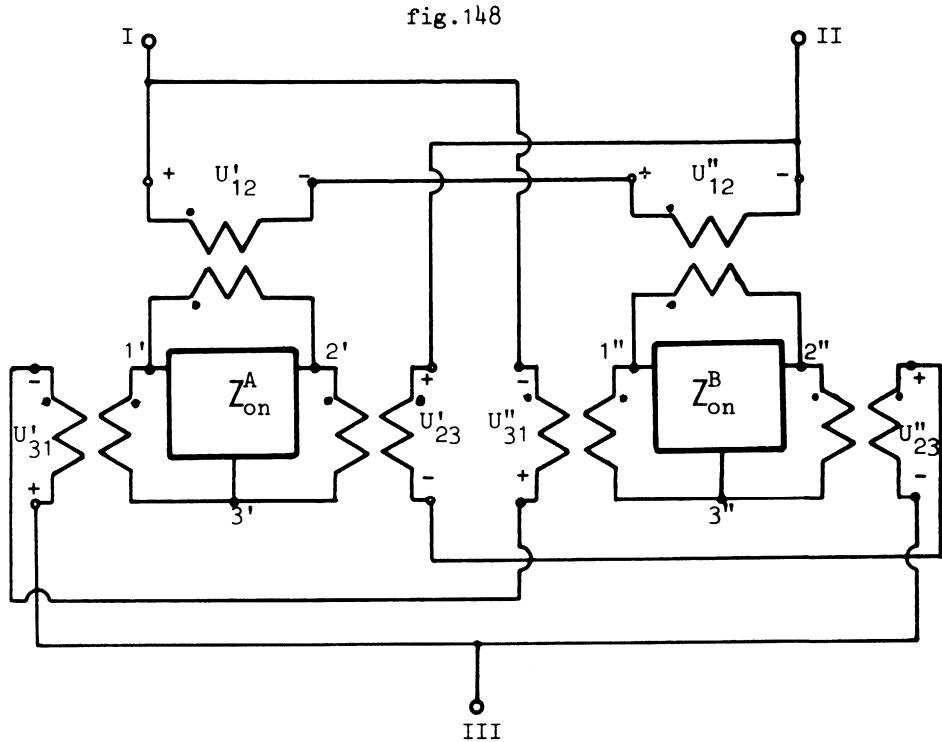
mits de poorten blijven bestaan en aan poortvoorwaarde na serieschakeling wordt voldaan.

In het algemeen blijven de bezwaren van § IX.4 gelden tenzij men speciale maatregelen neemt. De moeilijkheden kunnen worden ondervangen door toepassing van ideale transformatoren met een transformatieverhouding 1 : 1. Zie fig.148.

Met de drie-klemmen netwerken A (met klemmen 1', 2' en 3') en B (met klemmen 1'', 2'' en 3'') wordt door serieschakeling een nieuw drie-klemmen-netwerk afgeleid (met klemmen I, II en III).

Opdracht: Ga na dat inderdaad voldaan is aan de criteria voor serieschakelen; $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$ en $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2$.

Uit het voorgaande blijkt, dat het serieschakelen van n-klemmen netwerken met meer praktische problemen gepaard gaat dan het parallel schakelen. Het maakt dat de onbepaalde impedantiematrix weinig toepassing vindt. Wij bespreken derhalve de onbepaalde impedantiematrix niet verder.



Opmerking behorende bij blz.214:

Om de coëfficiënten van de hoogste macht van λ in A, B, H, K, D te bepalen moeten er nog twee onafhankelijke gegevens beschikbaar zijn.

Dit komt doordat wij nieuwe netwerken kunnen maken met precies dezelfde eigenfrequenties onder alle omstandigheden, door aan iedere poort van het gegeven netwerk een ideale transformator te verbinden.

De gegevens moeten betrekking hebben op het impedantieniveau van iedere poort, bijv. Z_{11} en Y_{22} als $\lambda \rightarrow 0$, of $\lambda \rightarrow \infty$. (In een ontaard geval, zoals $C = D = 0$, is er slechts één ideale transformatorverhouding die moet worden bepaald).

Deze gegevens, te zamen met de eigenfrequenties en verg.(22) bepalen de polynomen volledig, op een constante, gemeenschappelijke factor voor alle polynomen na. Deze constante heeft geen netwerktheoretische betekenis; zij mag bijv. zo gekozen worden dat de coëfficiënt van de hoogste macht in één van de polynomen één is.

X. LANGE LEIDINGEN

X.1. Inleiding

In de voorgaande hoofdstukken hebben wij ons bezig gehouden met netwerken, opgebouwd uit bepaalde geïdealiseerde elementen, die aan de wetten van Kirchhoff moeten beantwoorden. Deze elementen zijn alle geabstraheerd uit de werking van bepaalde fysische apparaten, welke konden worden gekarakteriseerd door de relaties tussen de aan de poorten waarneembare spanningen en stromen.

De algemene ervaring is, dat naarmate de afmetingen van het apparaat toenemen, of de frequentie van de aangeboden signalen toeneemt, de karakterisering door eenvoudige relaties tussen stromen en spanningen aan de klemmen steeds minder nauwkeurig wordt.

Het is dan nodig rekening te houden met alle elektrische en magnetische velden in en om het apparaat. Deze velden zijn niet alleen van de tijd afhankelijk maar ook van de ruimtelijke coördinaten. Enerzijds heeft dit tot gevolg dat de karakterisering van het apparaat door stroom- en spanningsrelaties aan de klemmenparen wordt vervangen door een karakterisering d.m.v. relaties tussen de elektrische en magnetische veldsterkten in bepaalde oppervlakken, welke nu als poorten dienen.

Anderzijds, wanneer een karakterisering door stroom- en spanningsrelaties aan de klemmenparen wel gerechtvaardigd is, nemen deze relaties een veel ingewikkelder vorm aan dan degene die wij al kennen.

Het is niet de bedoeling in dit hoofdstuk in detail op de gehele achtergrond van het elektromagnetisch veld in te gaan - daarvoor worden speciale colleges in de hogere studiejaren gegeven - maar wel een inleiding op fysisch aanschouwelijke wijze in één bijzonder systeem van dit type te geven.

Dit is het systeem van de lange leidingen, lechersystemen of transmissielijnen, welke overal in de elektrotechniek hun toepassing vinden.

Vanuit theoretisch standpunt bezien, wordt de theorie van transmissielijnen een belangrijke schakel tussen de theorie der elektrische netwerken en de theorie van het elektromagnetisch veld. Zowel de wetten van Kirchhoff als zuivere veldbeschouwingen komen aan de orde bij de bestudering van deze systemen.

X.2. Wij beschouwen nu een verliesvrij systeem, dat bestaat uit twee evenwijdig aan elkaar opgestelde vlakke platen, die door evenwijdige lijnen begrensd zijn.

Wij nemen een rechthoekig assenstelsel met de z -as evenwijdig aan deze grenslijnen. De afstand tussen deze platen is d meter, de breedte is b meter, zodanig dat $d \ll b$. Het systeem denken wij ons zeer lang. Zie fig.149.

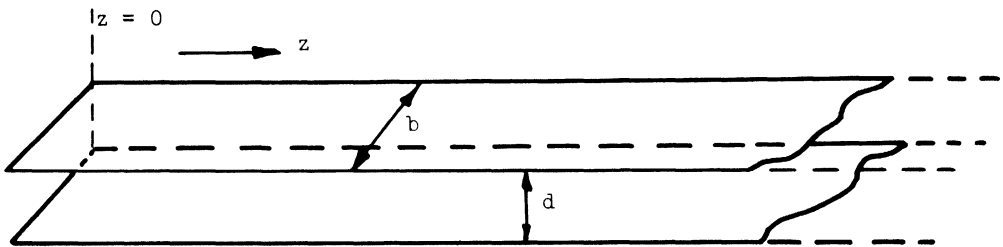


fig.149

De platen bestaan uit oneindig goed geleidend materiaal. Verder stellen wij ons voor, dat dit systeem door middel van een schakelaar kan worden aangesloten op een gelijkspanningsbron U . Zie fig.150.

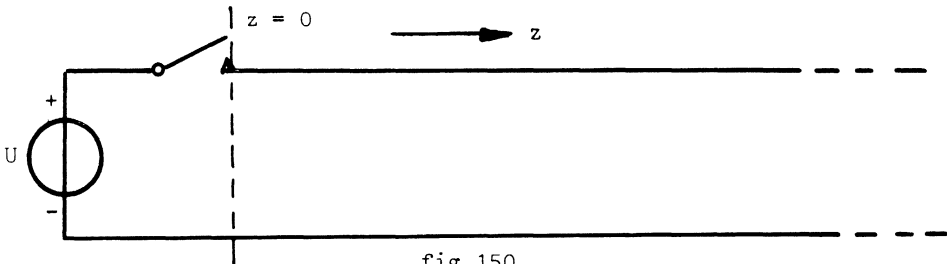


fig.150

Indien de schakelaar op $t = 0$ gesloten wordt, bestaat in het vlak $z = 0$ een spanning U tussen de platen voor $t \geq 0$.

Voor de verder bestudering van dit systeem zullen wij uitgaan van drie axioma's, waarvan de eerste als zeer fundamenteel in de theoretische natuurkunde te bestempelen is.

Axioma 1.: Als een verandering in een bepaald punt van de toestand van een fysisch systeem plaatsvindt, dan is deze ver-

andering pas waar te nemen in een ander punt in de ruimte, gelegen een afstand z van het eerste punt, op een tijdstip t na die verandering gegeven door $t \geq z/c$, waarin c de lichtsnelheid is.

Dit axioma berust op een lange reeks experimenten en is in overeenstemming met elke tot nu toe uitgevoerde waarneming of fysisch experiment *). Wat het axioma inhoudt is, dat gepaard gaande met elke storing (verandering in de plaatselijke toestand) er zich iets met een naar boven begrensde snelheid propageert.

Het is alleen door middel van dit zich propagerende verschijnsel dat de waarneming van de storing in een verafgelegen punt kan plaatsvinden.

Aldus stellen wij voor het systeem van fig.149, waarin het spanningsfront zich vanuit $z = 0$ naar rechts verplaatst met een snelheid $v \leq c$.

Wij veronderstellen v constant. Daarbij wordt tussen de platen een homogeen elektrisch veld opgebouwd, in dit geval gericht van boven naar beneden en dus loodrecht op de voortplantingsrichting van de verstoring.

Voor het tot stand komen van dit elektrische veld is het nodig dat aan de platen positieve, resp. negatieve lading wordt toegevoerd.

Dit betekent in de bovenste geleider een constante stroom naar rechts en in de onderste naar links. Naarmate de verstoring zich verder naar rechts verplaatst, wordt in steeds nieuwe delen van het systeem een transversaal elektrisch veld opgebouwd. Wij kunnen dan zinvol spreken over een capaciteit van die delen van het systeem waarover het elektrisch veld zich heeft uitgebreid.

Dit leidt ons tot het formuleren van

axioma 2.: In het systeem van fig.149 is één van de kenmerkende parameters de capaciteit per eenheidslengte.

Het is van belang dat men zich goed realiseert dat het alleen zinvol is, te spreken van een capaciteit per eenheidslengte wanneer het elektrisch veld overal loodrecht gericht is van de ene plaat

*) Het in 1887 uitgevoerde beroemde experiment van Michelson en Morley ligt ten grondslag hieraan en heeft geleid tot de ontwikkeling door Einstein van de speciale en de algemene relativiteitstheorie.

naar de andere plaat.

De basis van het hele propagatie-verschijnsel berust op de elektrische en magnetische velden. Als er bijv. een elektrisch veld tussen twee delen van de bovenplaat bestaat, dan kunnen wij niet volstaan met het eenvoudige model van een in de z-richting verdeelde capaciteit.

De capaciteit per meter lengte van het systeem is $C = \frac{\epsilon b}{d}$, waarbij rand-effecten zijn verwaarloosd.

Doordat in de bovenste plaat een stroom naar rechts vloeit en in de onderste een gelijke stroom naar links, zal er tussen de platen ook een magnetisch veld worden opgebouwd. Wij kunnen dan zinvol spreken van een zelfinductie van die delen van het systeem waarover het magnetische veld zich heeft uitgebreid.

Dit leidt ons tot het formuleren van

axioma 3: In het systeem van fig. 149, is één van de kenmerkende parameters de zelfinductie per eenheidslengte.

Wanneer de stroomverdeling in de platen zodanig is dat er bijv. magnetische koppeling tussen verschillende delen van dezelfde plaat bestaat, dan kunnen wij niet volstaan met een eenvoudig model van in de z-richting verdeelde zelfinductie

Doordat wij echter een heel bijzonder stroompatroon veronderstellen, is mede ten gevolge van de meetkundige configuratie van de platen het magnetische veld overal evenwijdig aan de platen en loodrecht op de propagatie-richting.

Hierdoor ontbreekt alle magnetische koppeling tussen delen van de platen met verschillende z-coördinaten.

Bij verwaarlozing van randeffecten is de zelfinductie per meter lengte van het systeem $L = \frac{\mu d}{b}$; wij kunnen 1 meter van het systeem immers opvatten als een winding van een spoel.

De zelfinductie is verdeeld langs de gehele lengte van het systeem.

In de volgende paragrafen zullen wij aantonen dat de drie axioma's en het stroom- en spanningspatroon overeenstemmen met de wetten van de elektriciteitsleer.

X.3. De voortplantingssnelheid

De lading per meter lengte van die delen van het onder X.2. beschouwde systeem waarover de verstoring zich heeft uitgebreid, is

$$q = CU.$$

Het gedeelte dat geladen is, wordt per seconde v meter langer; daartoe moet per seconde aan de bovenste plaat worden toegevoegd een lading CUv , zodat

$$I = CUv. \tag{1}$$

De magnetische flux per meter lengte is

$$\phi = LI.$$

Het gedeelte van het systeem waarover het magnetische veld zich opbouwt, wordt elke seconde v meter langer. De verandering van de flux per seconde is LIv , zodat volgens de inductiewet

$$U = LIv. \tag{2}$$

Substitutie van (1) in (2) geeft

$$v^2 = \frac{1}{LC}, \tag{3}$$

waaruit blijkt dat de voortplantingssnelheid van de elektromagnetische velduitbreiding afhangt van de capaciteit en de zelfinductie van het systeem per meter lengte.

Substitutie in (3) van $C = \frac{\epsilon b}{d}$ en $L = \frac{\mu d}{b}$ geeft

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}.$$

De voortplantingssnelheid is afhankelijk van de elektromagnetische eigenschappen van het medium.

In het geval dat het medium het vacuüm is, geldt

$$\epsilon = \epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1} \text{ en}$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}.$$

Hieruit volgt dat elektromagnetische verstoringen in vacuüm zich met een snelheid van ca. $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ (d.w.z. de lichtsnelheid) uitbreiden.

D.w.z. in het geval van vacuüm wordt de grenssnelheid wel bereikt.

X.4. Energie.

Uit de vergelijkingen (1) en (2) volgt na eliminatie van v

$$\frac{I}{U} = \frac{CU}{LI}, \text{ zodat } LI^2 = CU^2,$$

of
$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}CU^2. \quad (4)$$

De veldenergie, die zich ophoopt in het systeem verdeelt zich gelijk over de magnetische en elektrische energie.

X.5. De karakteristieke impedantie

In elk punt van het systeem tot waar het elektromagnetisch veld zich heeft uitgebreid, is sprake van dezelfde spanning U en dezelfde stroom I . In elk van die punten is te definiëren een grootheid Z_0 met de dimensie van impedantie, $Z_0 = \frac{U}{I}$, die overal dezelfde waarde heeft.

Met (1) en (2) volgt $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$, (5)

waaruit blijkt dat Z_0 bepaald wordt door voor het onderzochte systeem kenmerkende grootheden. Men noemt Z_0 de karakteristieke impedantie van het systeem. Z_0 is in dit verliesvrije geval reëel.

Indien de geleiders een eindige lengte l hebben, zodat $z \leq 1$, en aan het einde $z = 1$ worden aangesloten op een weerstand, die gelijk is aan de karakteristieke impedantie, dan gedraagt het systeem zich voor $z < 1$ net zo alsof de lengte daarvan oneindig was. Immers, de energie die zich in het geval dat het systeem oneindig lang is, uitbreidt voor $z < 1$ zal in het geval met eindige lengte geheel gedissipeerd worden in de weerstand $R = Z_0$ waarmee het systeem dan is afgesloten.

X.6. Reflectie

Wij zullen nu onderzoeken wat er gebeurt indien de geleiders van een eindige lengte l worden afgesloten met een impedantie, die niet gelijk is aan de karakteristieke impedantie. Wij zullen zien dat in die gevallen reflectie optreedt.

X.6.1. $Z = \infty$, d.w.z. de eind- of uitgangspoort van de transmissielijn

$(z = 1)$ is open.

Wij stellen ons voor dat van het tijdstip $t = 0$ af de ingangspoort ($z = 0$)

is aangesloten op een gelijkspanningsbron met sterkte U .

Fig. 151a geeft de situatie op $t = 0$. Alleen in $z = 0$ is er een spanning U . De stroom I is overall nog nul. Fig. 151b geeft de toestand op het tijdstip t_1 , ($t_1 > 0$).

De spanning U heeft zich uitgebreid tot punten rechts van $z = 0$, het spanningsfront bevindt zich op t_1 in het punt $l_1 = \frac{t_1}{\sqrt{LC}}$. De toevloeiende lading vertegenwoordigt een stroom, waarvan het front even gevorderd is als de spanning.

Dit is afgebeeld in de onderste helft van fig. 151b. Met het voortschrijden van de tijd verplaatsen de fronten van de elektromagnetische verstoring zich steeds verder naar rechts; zie fig. 151c voor de situatie op $t = t_2$. Op het tijdstip $t_3 = l\sqrt{LC}$ bereiken de fronten het einde van de transmissielijn; zie fig. 151d.

Op dit moment kan de lading zich niet verder naar rechts voortplanten. Dit betekent dat òf de stroom plotseling nul moet worden òf de lading aan het einde van de lijn zich moet ophopen waardoor de spanning aldaar boven de waarde U stijgt.

Als de lading zich verder in de omgeving van $z = l$ ophoopt, kan de stroom ook in deze omgeving nul worden. In elk geval is de stroom in $z = l$ wel nul. Stel nu dat over een korte afstand Δz deze ophoping in een tijd Δt plaatsvindt, en dat over deze afstand de stroom ook nul is.

Dan is de magnetische flux over dit stukje lijn ook veranderd, hetgeen tot gevolg heeft dat een extra spanning aan het einde van de lijn ontstaat, gegeven door

$$\frac{LI\Delta z}{\Delta t}.$$

Maar door de ophoping van lading moet deze extra spanning ook gelijk zijn aan $\frac{I\Delta t}{C\Delta z}$.

Verder is $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = v$.

Wij kunnen dan stellen dat de spanning aan het einde van de lijn wordt

$$U + LIv = 2U, \text{ wegens (2).}$$

Wij hebben dan het verschijnsel van een gereflecteerde spanning, die zich ook met de snelheid v in de omgekeerde richting voortplant.

Deze gereflecteerde spanning heeft dezelfde polariteit als de incidente spanning, d.w.z. de spanning die zich voor $t < t_3$ in de positieve z -richting propageert.

Het resultaat is dat de verdubbelde spanningswaarde van de bron wordt verkregen. De situatie wordt afgebeeld in fig.151e en f. In fig. 151e is de spanning afgebeeld die zou ontstaan als de lijn langer dan l was.

In ons geval echter wordt deze spanning a.h.w. teruggekaatst en op de reeds aanwezige spanning gestapeld.

Iets dergelijks gebeurt met de stroom, met het verschil dat, daar de stroom in $z = 1$ nul moet zijn, de gereflecteerde stroom van gelijke grootte naar omgekeerde richting is. Wij krijgen dan de propagatie in de negatieve z -richting van een nul-stroomfront (zie fig.151f en g).

Het mechanisme van de reflectie kunnen wij zoeken in twee feiten, nl. dat aan het einde van de lijn een discontinuïteit in het zich opbouwende stroompatroon wordt opgedrongen en in de traagheid van stroomverandering, welke berust op de inductiewet van Faraday.

Tenslotte is in fig.151h getekend de situatie voor t_5 met $t_4 < t_5 < 2t_3$. Wij zullen niet onderzoeken wat er gebeurt voor $t_6 \geq 2t_3$, d.w.z. als de fronten het punt $z = 0$ bereikt hebben.

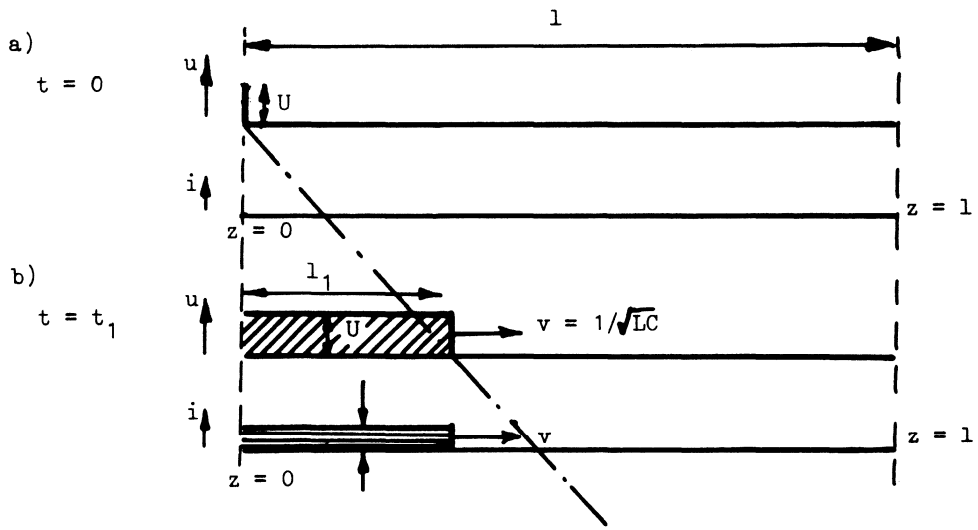
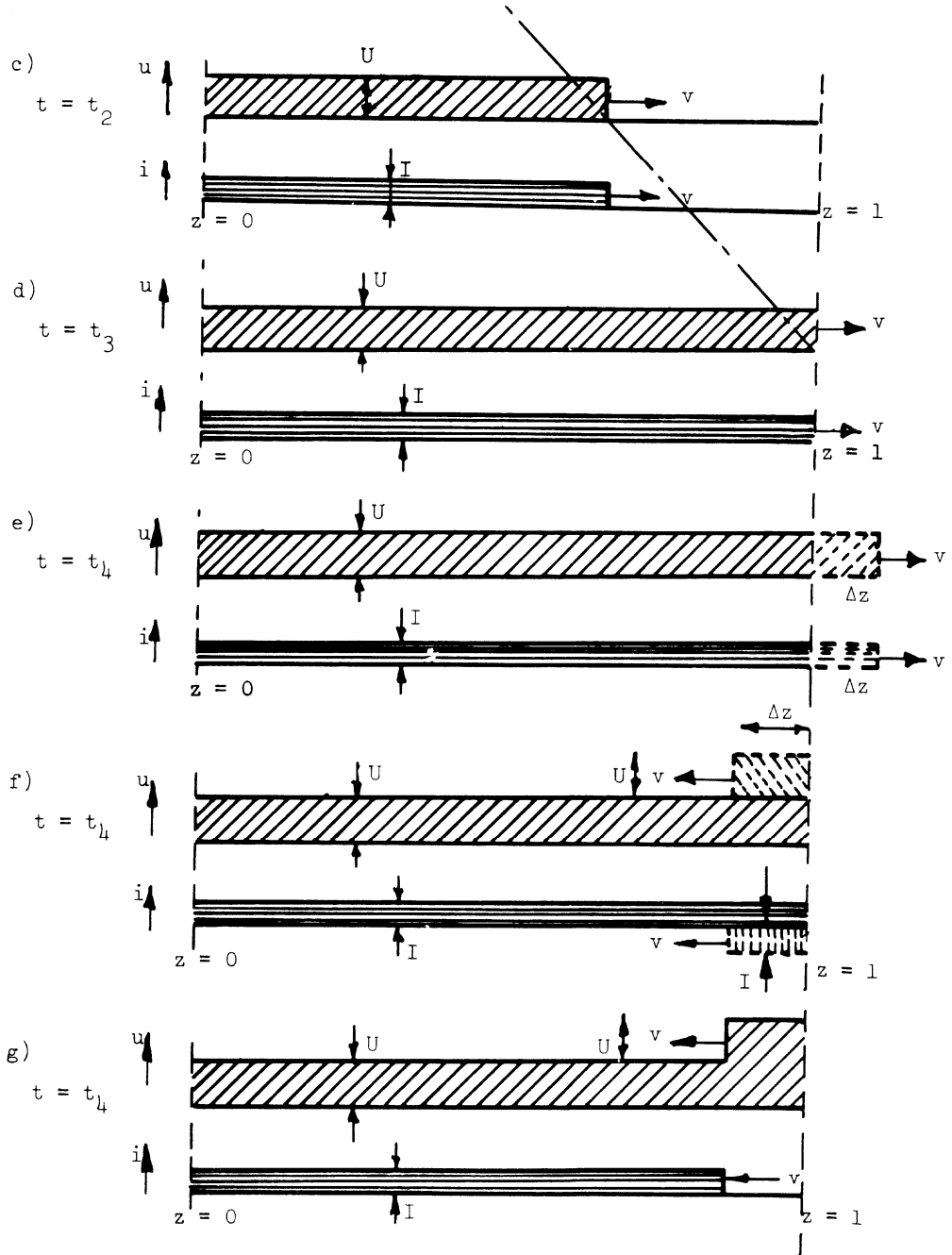
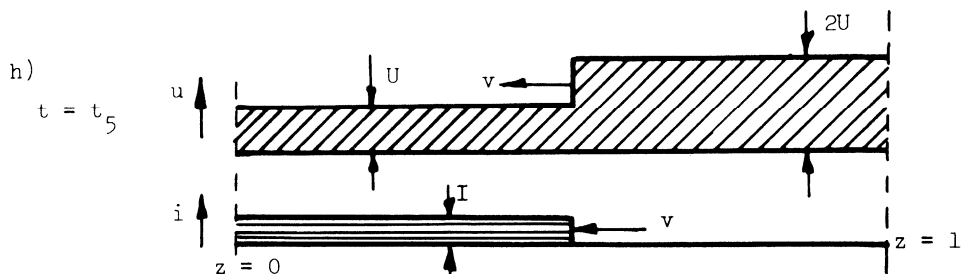


fig.151 a en b.

fig.151 c t/m g.





Wij kunnen het probleem ook via de energie bekijken. De magnetische energie per eenheidslengte $\frac{1}{2}LI^2$ aan het einde van de lijn moet verdwijnen; deze wordt omgezet in elektrische energie. In § X.4. hebben wij gezien dat, voordat reflectie optreedt, de grootten van de magnetische en elektrische energieën gelijk zijn. De elektrische energie wordt dus in het lijndeel met $(1 - \Delta z) \leq z \leq 1$ tweemaal zo groot.

Deze energie die zich volgens fig.151e zou moeten bevinden tussen de punten $z = 1 - \Delta z$ en $z = 1 + \Delta z$ is volgens fig.151f opgehoopt in het lijndeel $1 - \Delta z \leq z \leq 1$.

In de helft van de ruimte zit dus het dubbele van de oorspronkelijke elektrische energie; de energiedichtheid is daar dus vier maal zo groot, hetgeen volgens $\frac{1}{2}Cu^2$ met een verdubbeling van de spanning correspondeert.

Deze voorplantings- en reflectieverschijnselen zijn heel goed bekend bij allerlei mechanische systemen. Denken wij bijv. aan een koord dat plotseling aan één einde een opgedrukte verplaatsing krijgt, dan is wel bekend en ook gemakkelijk door een experiment te verifiëren, dat onder verwaarlozing van energie-verliezen, deze verplaatsing zich naar het (vrije) einde propageert en met dubbele waarde wordt teruggekaatst. De rekspanning in het touw, t.g.v. deze verplaatsing, wordt echter als een nulspanning teruggekaatst.

Deze begrippen zijn fundamenteel bij alle golfverschijnselen zoals in de akoestiek, watervolven, aardbevingen, licht enz.

X.6.2. $Z = 0$, d.w.z. de uitgangspoort is kortgesloten.

De redenering is precies de duale van § X.6.1. De stroom wordt verdubbeld gereflecteerd en de spanning wordt als nulspanning terugge-

kaatst.

Opgave: Beredeneer het gehele reflectieverschijnsel van de eerste beginselen af.

X.6.3. $Z = Z_0$, d.w.z. de uitgangspoort is afgesloten met de karakteristieke impedantie.

Op ieder punt van de transmissielijn is de verhouding $\frac{U}{I}$ gelijk aan Z_0 ; in dit geval is dit aan het eind van de leiding ook zo.

De situatie $z = 1$ is dezelfde alsof het systeem zich voor $z > 1$ oneindig ver uitstrekt. Er vindt dan geen reflectie plaats. Wij releveerden dit geval al onder § X.4.

X.6.4. Het geval $Z_0 < |Z| < \infty$,

Vergelijken wij dit geval met het onder § X.6.1. behandelde, dan zien wij dat de stroom I wel afneemt in een mate die bepaald wordt door U en Z , maar niet geheel nul wordt. Slechts een gedeelte van de magnetische veldenergie zal zich dus omzetten in elektrische. Het gevolg ervan is dat de spanning die zich nu aan het einde van de leiding opbouwt kleiner is dan $2U$; slechts een deel van de elektromagnetische energie wordt nu gereflecteerd.

Bovendien als $\text{Re } Z \neq 0$ is, dan zal een deel van de totale energie in Z worden gedissipeerd.

Wij zullen nu hierop verder ingaan voor het geval de impedantie een zuivere weerstand is: $Z = R$.

Indien wij stellen dat in $z = 1$ de spanning $U + \Delta U$ wordt, (met $\Delta U < U$) terwijl de stroomsterkte verlaagd wordt tot $I - \Delta I$, (met $\Delta I < I$) dan moet, omdat de lijn daar is afgesloten met een weerstand R , gelden

$$\frac{U + \Delta U}{I - \Delta I} = R.$$

Volgens (2) geldt $\Delta U = Lv\Delta I$. Met $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

en $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, volgt $\Delta U = Z_0 \Delta I$.

$U = Z_0 I$. Substitutie van de spanningen ΔU en U geeft $\frac{\Delta I}{I} = \frac{R - Z_0}{R + Z_0}$.

Substitutie van de stromen ΔI en I geeft

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} . \text{ Wij noemen } \rho = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} \text{ de reflectiefactor van}$$

de afsluitweerstand R van het systeem met karakteristieke impedantie Z_0 .

Wij kunnen ook de energiebalans voor dit geval als volgt opmaken:

Op een tijdstip Δt nadat het spanningsfront aankomt, bedraagt de verandering in de elektrische energie:

$$\frac{1}{2}C(U + \Delta U)^2 \Delta z - \frac{1}{2}C U^2 \Delta z,$$

waarin Δz de lengte van de lijn is, die het teruggekaatste front in de tijd Δt afgelegd heeft. D.w.z.

$$\Delta W_e = \frac{1}{2}C \left[(1 + \rho)^2 - 1 \right] U^2 = \rho(2 + \rho) W_e .$$

De verandering in de magnetische energie is:

$$\Delta W_m = \frac{1}{2}L \left[(1 - \rho)^2 - 1 \right] I^2 = \rho(-2 + \rho) W_m ,$$

waarin W_e en W_m , ΔW_e en ΔW_m de energieën, resp. de verandering van de energieën per eenheidslengte aanduiden.

De totale verandering in energie is dus $\rho^2 W$,

waarin $W_m = W_e = \frac{1}{2}W$, met W de totale energie per eenheidslengte op $t = t_3$ is.

In hetzelfde tijdsinterval Δt wordt in de afsluitweerstand een energie gedissipeerd:

$$R(I - \Delta I)^2 \Delta t = R(1 - \rho)^2 I^2 \frac{\Delta z}{v} ,$$

terwijl in hetzelfde interval door de bron de energie $UI\Delta t$ wordt aangevoerd.

$$\text{Derhalve is } UI \frac{\Delta z}{v} = \left[\rho^2 W + \frac{R}{v} (1 - \rho)^2 I^2 \right] \Delta z$$

$$\text{of } UI = \rho^2 Wv + R(1 - \rho)^2 I^2 . \quad (6)$$

$$\text{Maar } UI = \frac{1}{2}(UI + IU) = \frac{1}{2} \left[LI^2 v + CU^2 v \right] = Wv .$$

$$\text{Dus is } (1 - \rho^2) Wv = R(1 - \rho)^2 I^2 . \quad (7)$$

Wij kunnen vergelijkingen (6) en (7) als volgt interpreteren:

UI is het door de bron aangevoerde vermogen.

W_v is de aan het einde van de lijn aangevoerde vermogensstroom, d.w.z. de hoeveelheid energie per seconde die aan de afsluitpoort wordt aangeboden.

Hiervan wordt een deel teruggekaatst nl. $\rho^2 W_v$.

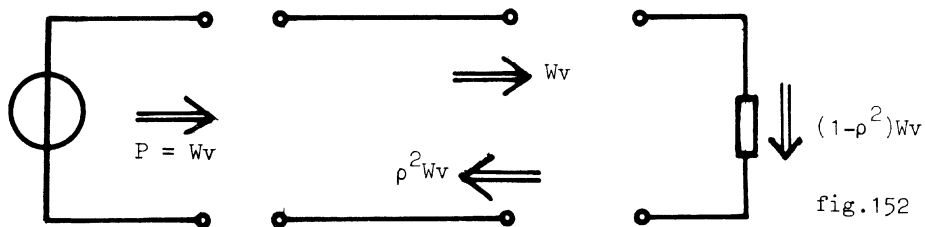
Het verschil, nl. $(1 - \rho^2)W_v$ wordt door de weerstand opgenomen, d.w.z. geabsorbeerd.

De stroom door de weerstand moet dan worden gegeven als

$$R I_R^2 = (1 - \rho^2)W_v, \text{ waarbij } I_R = I - \Delta I = (1 - \rho)I,$$

in overeenstemming met (7).

Het een en ander wordt weergegeven in fig.152.



X.6.5. Het geval $Z_0 > |Z| > 0$

Dit geval laat zich op dezelfde wijze beschrijven als het vorige. De elektrische energie zet zich hier niet geheel om in magnetische energie, zoals wèl het geval is bij $Z = 0$, (zie § X.6.1.).

De spanning U neemt af in mate, die bepaald wordt door I en Z .

De reflectiecoëfficiënt heeft in dit geval het tegengestelde teken als onder § X.6.4. Verder zijn alle beschouwingen voor dit geval precies de duale van die van § X.6.4.

Opgave: Aan de ingang wordt een gelijkspanningsbron met sterkte U ingeschakeld op $t = 0$ en op $t = t_1$ wordt de bronsterkte nul, met $t_1 \ll 1/c$.

Bepaal door een redenering als in de voorgaande paragrafen alle

verdere verloop van spanning en stroom in de lijn voor alle voorgaand behandelde afsluitvoorwaarden.

Aanwijzing: Leid dit vraagstuk terug tot een superpositie van verschijnselen, welke rechtstreeks uit de voorgaande beschouwingen volgen.

X.7. Een transmissielijn met verliezen

In de voorgaande paragrafen beperkten wij ons tot beschouwingen van een transmissiesysteem, dat verliesvrij was. Eén van de gevolgen is dat de signalen ongedempt waren. Een andere konsekwentie is dat de karakteristieke impedantie reëel was; het systeem kende geen vervorming van het signaal.

In de volgende paragraaf bestuderen wij een meer algemeen geval, waarbij verliezen niet verwaarloosd worden.

In plaats van de eenvoudige beschouwingen over gelijkstromen en golf-fronten, is het nu zaak met sinus- en exponentiële functies te werken, hetgeen onvermijdelijk tot gevolg heeft dat wij nu met differentiaalvergelijkingen moeten gaan werken. De drie axioma's blijven echter geldig.

X.7.1. Wij beschouwen nu een oneindig lange homogene en uniforme tweedraadsleiding (kabel) resp. evenwijdige platen, waarop aan één uiteinde een spanningsbron is aangesloten. De draden hebben weerstand en zelfinductie, die uniform verdeeld is over de hele lengte van de lijn. Tussen de beide draden bestaat een (eveneens verdeelde) capaciteit, terwijl verondersteld wordt dat de isolatie niet perfect is, zodat tussen de draden een (verdeelde) geleiding aanwezig is. Hierdoor zal de spanning tussen de draden en de stroom door de draden niet alleen afhankelijk zijn van de tijd (t), maar tevens een functie zijn van de plaats (z) en de eigenschappen van de tweedraadsleiding.

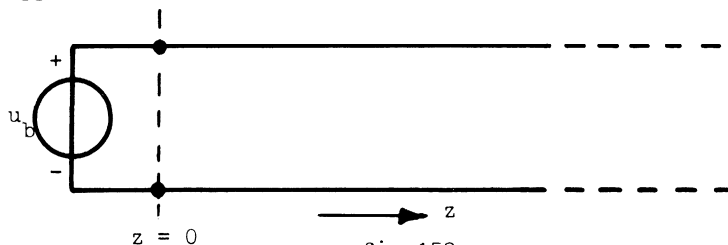


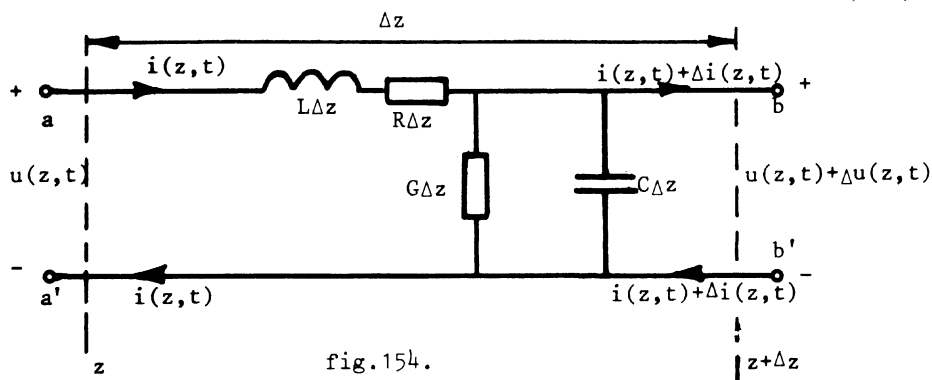
fig.153

Wij beschouwen een sectie van de lijn.

De weerstand van beide draden te zamen per meter noemen wij R (serie-weerstand). De totale zelfinductie van de draden per meter heet L .

Tussen de beide draden bestaan per meter lengte een capaciteit C en een geleiding G .

Kiezen wij een sectie met een lengte Δz dan kunnen wij daarvan het volgende vervangingsschema geven met fouten in de stroomspanning relaties van $O(\Delta z^2)$:



De grootheden R , L , C en G zijn constanten omdat de lijn homogeen en uniform is en de eigenschappen van de leiding onafhankelijk van u , van i en van t worden verondersteld. R , L , C en G zijn alle groter dan nul. De lijn is derhalve een lineair en passief netwerk.

Passen wij de spanningswet van Kirchhoff toe op lus a, b, b', a', a dan vinden wij, onder de veronderstelling dat u en i continu differentieerbaar zijn:

$$\Delta u(z,t) = -R\Delta z i(z,t) - L\Delta z \frac{\partial i(z,t)}{\partial t},$$

zodat voor $\Delta z \rightarrow 0$ geschreven kan worden

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (8)$$

Ter wille van de overzichtelijkheid is in (8) weggelaten de aanduiding dat u en i functies zijn van z en van t .

Passen wij de stroomwet van Kirchhoff toe op het bovenste knooppunt, waar $G\Delta z$ en $C\Delta z$ zijn verbonden, dan vinden wij

$$\Delta i(z,t) = -G\Delta z\{u(z,t) + \Delta u(z,t)\} - C\Delta z \frac{\partial\{u(z,t) + \Delta u(z,t)\}}{\partial t}$$

of

$$\frac{\Delta i}{\Delta z} = -G\{u + \Delta u\} - C \frac{\partial\{u + \Delta u\}}{\partial t}$$

zodat voor $\Delta z \rightarrow 0$, (en dus $\Delta u \rightarrow 0$) geschreven kan worden

$$- \frac{\partial i}{\partial z} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} . \quad (9)$$

X.7.2. Differentiëren van (8) naar z geeft

$$- \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R \frac{\partial i}{\partial z} + L \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial z} \right).$$

Substitutie van (9) hierin geeft

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (GL + RC) \frac{\partial u}{\partial t} + RGu . \quad (10)$$

Evenzo kan worden afgeleid

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (GL + RC) \frac{\partial i}{\partial t} + RGi . \quad (11)$$

(10) en (11) vormen een stelsel lineaire simultane partiële differentiaalvergelijkingen.

Zij worden in de literatuur wel de telegraafvergelijkingen genoemd.

Een algemene expliciete oplossing van deze vergelijkingen is nogal ingewikkeld, behalve in het geval één of meer constanten L , C , R of G nul is.

X.7.3. Voor signalen van de vorm $Ue^{j\omega t}$, resp. $Ie^{j\omega t}$ kunnen wij in het frequentiedomein voor (8) en (9) schrijven

$$\frac{dU(z)}{dz} = - (R + j\omega L)I(z) \quad \text{en} \quad (12)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = - (G + j\omega C)U(z), \quad (13)$$

waarin U en I alleen afhankelijk zijn van z en niet meer van t .

Hierom zijn ook de partiële differentiaal quotiënten vervangen door gewone.

Uit (7) en (8) valt af te leiden

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} = \gamma^2 U(z) \quad (14)$$

en

$$\frac{d^2 I(z)}{dz^2} = \gamma^2 I(z) \quad (15)$$

waarin $\gamma^2 \stackrel{\text{def}}{=} (R + j\omega L)(G + j\omega C)$. (16)

Door het ontbreken van de tijdsafhankelijkheid in de relaties, die gelden in het frequentiedomein, zijn de betrekkingen (14) en (15) veel eenvoudiger dan de telegraafvergelijkingen (10) en (11).

γ heet de voortplantingsconstante; γ is i.h.a. kompleks.

X.7.4. Oplossingen voor de vergelijkingen (14) en (15) zijn:

$$U(z) = U_i e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z} \quad \text{en} \quad (17)$$

$$I(z) = I_i e^{-\gamma z} + I_r e^{\gamma z}, \quad \text{waarin } U_i, U_r, I_i \text{ en } I_r \text{ integratie-} \quad (18)$$

constanten zijn.

Stellen wij $\gamma = \alpha + j\beta$, dan kan de oplossing in het tijdgebied worden geschreven als:

$$u(z,t) = |U_i| e^{-\alpha z} \operatorname{Re}(e^{j(\omega t - \beta z + \phi_1)}) + |U_r| e^{\alpha z} \operatorname{Re}(e^{j(\omega t + \beta z + \phi_2)}) \quad (19)$$

waarin ϕ_1 en ϕ_2 de argumenten zijn van U_i en U_r , terwijl een dergelijke vorm ook kan worden geschreven voor $i(z,t)$.

Uit (14) en (15) volgt dat $U_i = Z_0 I_i$ en $U_r = Z_0 I_r$ met $Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$.

Daar het systeem passief is, moeten wij in deze uitdrukking die wortel kiezen welke een positief reëel deel van Z_0 bevat.

Wat betekent nu een oplossing als (19)? Wij zullen hierna zien dat de beide termen daarin, die functies zijn van t en van z , lopende golven beschrijven in de tweedraadsleiding.

X.7.5. Lopende golven.

In de oplossing (19) komt voor een term

$$u_i(z,t) = |U_i| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_1).$$

$u_i(z,t)$ beschrijft een golfverschijnsel dat zich voortplant in de richting van toenemende z (naar rechts dus).

Opdracht: Ga dit na.

De snelheid van het golfverschijnsel wordt als volgt bepaald:

Zien wij even af van de dempingsfactor $e^{-\alpha z}$, dan zien wij dat punten met een spanning met gelijke fase ϕ_1 worden bepaald door:

$$\omega t - \beta z = 0$$

d.w.z. deze punten voldoen aan de betrekking $z = \frac{\omega}{\beta} t$.

Wij noemen de term $\frac{\omega}{\beta}$ de fase-snelheid, daar deze parameter de snelheid aangeeft waarmee de punten waarin de golf een vaste waarde van de fase heeft, worden doorlopen.

In dit geval is deze snelheid ook dezelfde als de snelheid waarmee de energie wordt gepropageerd. Het valt echter buiten het bestek van dit college om hier verder op in te gaan. Belangrijk in dit stadium is te weten dat bij golfverschijnselen in het algemeen de fase-snelheid en de snelheid van energiepropagatie niet altijd gelijk zijn.

De kleinste afstand tussen twee punten van de lijn met spanningen met dezelfde fase heet de golflengte λ . Daar een golflengte overeenkomt met een fase-verschil van 2π , is $\beta\lambda = 2\pi$, zodat $v = 2\pi f/\beta = \lambda f$, (20)
met $f = \omega/2\pi$.

Op dezelfde wijze is af te leiden dat de andere term in (19) $u_r(z,t)$ een golfverschijnsel beschrijft dat van rechts naar links verloopt.

Men noemt u_i de invalende (incidente) golf en u_r de teruggekaatste (gereflecteerde) golf.

Precies gelijke beschouwingen gelden voor de stromen.

Uit de voorgaande beschouwingen is het duidelijk dat de grootheid α te maken heeft met energieverliezen en dus de dempingsterm wordt genoemd, terwijl β , het imaginaire deel van γ , nauw samenhangt met de fase van het verschijnsel en de fase-term wordt genoemd.

X.7.6. De karakteristieke impedantie Z_0 .

Indien geen reflectie in de leiding plaatsvindt, reduceren (17) en (18) zich tot

$$U(z) = U_i e^{-\gamma z} \quad \text{en} \quad (21)$$

$$I(z) = I_i e^{-\gamma z} . \quad (22)$$

Differentiëren van (21) naar z geeft

$$\frac{dU(z)}{dz} = -\gamma U_i e^{-\gamma z} .$$

Dit combinerend met (12) geeft:

$$-\gamma U_i(z) e^{-\gamma z} = -(R + j\omega L)I(z) .$$

Substitutie van (22) hierin geeft

$$\frac{U_i(z)}{I_i(z)} = \frac{R + j\omega L}{\gamma} \quad \text{hetgeen met (16) leidt tot}$$

$$\frac{U_i(z)}{I_i(z)} = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} .$$

$\frac{U_i}{I_i}$ heeft de dimensie van impedantie en dit quotiënt is onafhankelijk van z .

Dit is een gevolg van het homogeen en uniform zijn van de leiding. Op elke plaats in een oneindig lange transmissielijn nemen wij dus dezelfde impedantie waar. Wij noemen deze impedantie de karakteristieke impedantie Z_0 .

Wij zien:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} \quad (23)$$

waarbij $|\arg Z_0| \leq \pi/2$, $\arg Z_0 = \arctan \omega L/R - \arctan \omega C/G$.

Z_0 is in het algemeen een complexe grootheid.

Voor een verliesvrije leiding dus met $R = G = 0$ (zodat $\alpha = 0$ en

γ is imaginair) geldt $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ zodat Z_0 dan reëel is. De signalen zijn dan niet gedempt, immers $\alpha = 0$ en er is geen dissipatie. ($R = G = 0$).

Wij ontmoetten een dergelijk geval in § X.5.

In een oneindig lange leiding vindt geen reflectie plaats, of beter gezegd een reflectie van een incident signaal laat oneindig lang op zich wachten. Wij zagen al, dat op elke plaats van zo'n oneindig lange lijn telkens sprake is van dezelfde grootte Z_0 , die wij daarom de karakteristieke impedantie noemen. Beschouwen wij nu een transmissielijn met eindige lengte l , die is afgesloten met de karakteristieke impedantie (zie fig.155) dan is voor alle punten $0 \leq z \leq l$

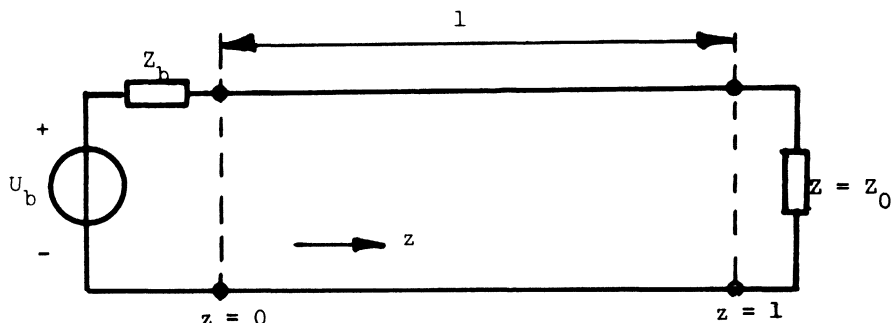


fig.155

de situatie dezelfde als in fig. 150. Dat wil zeggen, in een eindig lange leiding afgesloten met een voor die leiding en frequentie karakteristieke impedantie, vinden ook geen reflecties plaats.

Indien de belasting $Z \neq Z_0$ is de belasting niet aangepast en treden wèl reflecties op.

Wij zullen deze reflecties nu nader bezien.

Een heel bijzonder geval is dat waarbij $R/G = L/G$.

Dan is de karakteristieke impedantie reëel en onafhankelijk van de frequentie. Wij noemen een transmissielijn met deze eigenschap dispersie-vrij. Dit betekent dat wanneer er tegelijk meer sinusvormige signalen aanwezig zijn, de propagatie op gelijke wijze voor alle sinussen plaatsvindt, zodat een ingewikkelde lopende-golf zijn vorm (ruimtelijke afhankelijkheid) behoudt als de tijd varieert.

X.7.7. Reflectie in een eindig lange tweedraadsleiding afgesloten met een willekeurige impedantie Z.

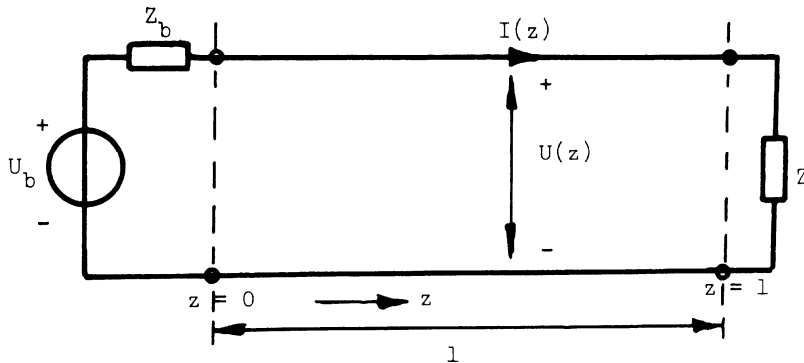


fig.156

Wij vonden:

$$U(z) = U_i e^{-\gamma z} + U_r e^{+\gamma z}, \quad (17)$$

$$\text{dus } \frac{dU(z)}{dz} = -\gamma U_i e^{-\gamma z} + \gamma U_r e^{+\gamma z}.$$

$$\text{Nu is volgens (12), } \frac{dU(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z),$$

$$\text{zodat } I(z) = \frac{\gamma}{R + j\omega L} \{U_i e^{-\gamma z} - U_r e^{+\gamma z}\};$$

hetgeen met (16) en (23) geschreven kan worden als

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} \{U_i e^{-\gamma z} - U_r e^{+\gamma z}\} \quad (24)$$

Vergelijken wij (17), (18) en (24), dan valt een wezenlijk verschil op in het gedrag van de gereflecteerde spanning respectievelijk de gereflecteerde stroom; verschillen u_i en u_r , ϕ radialen in fase, dan is het verschil in fase tussen i_i en i_r als gevolg van het min-teken $\phi + \pi$ radialen.

Wij bezien nu spanning en stroom aan het eind van de lijn, $z = l$.

$$\frac{U(l)}{I(l)} = Z = Z_0 \frac{U_i e^{-\gamma l} + U_r e^{\gamma l}}{U_i e^{-\gamma l} - U_r e^{\gamma l}} \quad (25)$$

Wij definiëren vervolgens een spanningsreflectie factor ρ_u als de verhouding van de gereflecteerde spanningsgolf en de incidentie spannings-

golf in het reflectiepunt $z = l$.

$$\rho_u = \frac{U_r e^{+\gamma l}}{U_i e^{-\gamma l}} = \frac{U_r}{U_i} e^{2\gamma l}. \quad (26)$$

Uit (25) volgt

$$Z = Z_0 \frac{1 + (U_r/U_i)e^{2\gamma l}}{1 - (U_r/U_i)e^{2\gamma l}} \quad \text{of} \quad (27)$$

$$Z = Z_0 \frac{1 + \rho_u}{1 - \rho_u} \quad (27)$$

Herschrijven geeft $\rho_u = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$. (28)

Hieruit volgt hetgeen wij al wisten, nl. dat als een lijn wordt afgesloten met haar karakteristieke impedantie, geen reflectie optreedt:

$$\rho_u = 0.$$

Indien wij op analoge wijze een stroom-reflectiefactor ρ_i definiëren als de verhouding van de gereflecteerde stroomgolf en de incidentie stroomgolf in het reflectiepunt $z = l$, laat zich afleiden:

$$\rho_i = \frac{Z_0 - Z}{Z + Z_0}, \quad \rho_i = \frac{Y - Y_0}{Y + Y_0}. \quad (29)$$

Opdracht: Ga dit na. Merk op $\rho_i = -\rho_u$.

Ook hier treedt geen reflectie op als de lijn met de karakteristieke impedantie wordt afgesloten.

In het College Elektrische Netwerken III gaan wij nader in op deze reflectieproblematiek, hetgeen in wezen een energie- of vermogensreflectie betreft: (zie dictaat Netw.III, het hoofdstuk over de verstrooiingsmatrix \mathcal{S}).

X.7.8. Opgaven.

1. Toon aan dat de kettingmatrix van de tweedraadstransmissielijn van lengte l , beschouwd als tweepoortnetwerk, is

$$K = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix}$$

Aanwijzing: Gebruik de voorwaarden $z = 0$, $z = l$ in de voorgaande formules.

2. Verifieer de reciprociteitseigenschap voor transmissielijnen.
3. Bereken de tweepoort-immittantiematrices.
4. Onderzoek de impedantie als functie van de frequentie van een uniforme verliesvrije lijn waarvan de uitgangspoort (a) kortgesloten, (b) open is.
Kunt u een verband tussen uw resultaten en het theorema van Foster leggen?
5. Een schakeling bestaat uit een transmissielijn van lengte l en karakteristieke impedantie Z_0 , afgesloten aan een poort met een capaciteit C . Gezien aan de ingangspoort is deze schakeling equivalent aan een andere schakeling bestaande uit uitsluitend transmissielijnen voor sinussignalen van frequentie f_0 .
Bepaal deze equivalente schakeling.
6. Twee transmissielijnen van verschillende karakteristieke impedanties worden in cascade geschakeld. Bepaal de impedantie, gemeten aan de ingangspoort wanneer de uitgangspoort met de impedantie Z_r is afgesloten, als functie van de lengtes en de karakteristieke impedanties.
Bepaal deze impedantie als functie van de frequentie wanneer (a) $Z_r = 0$, (b) $Z_r = \infty$.